416521
BIBLIOTHECA JAGELL. CRACOVIENSIS
11 (1932) II

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

# ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

## TOME XI

ANNÉE 1932

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA

KRAKÓW 1933

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

# ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XI

ANNÉE 1932

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA




KRAKÓW 1933

Les publications de la Société polonaise de mathématique ont paru pour la première fois en 1921 sous le titre de „Rozprawy Polskiego Towarzystwa matematycznego".

---

416521

II - 11



PRINTED IN POLAND

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

*

Reprodukcja fotooffsetowa, 1965
Zakład Graficzny PWN, Łódź

Bibl. Jagiell.
1965 C EO 2409

## Table des matières.

# Sur une équation de transformation.

Par

M. K. Abramowicz à Poznań.

Dans ma note: „Transformation des fonctions automorphes", insérée dans les Comptes Rendus, t. 187, j'ai determinée le degré de l'équation de transformation de la fonction automorphe appartenant [1]) au groupe $(p, q, r)$ de Fricke, défini dans le corps algébrique $R_m(j)$ de dégre $m$. Dans l'article actuel nous nous proposons d'envisager les cas où le degrě de cet équation pourra s'abaisser.

Nous faisons l'hypothèse que 1) le corps algébrique $R_m(j)$ de degré $m$, défini par l'équation $F(j)=0$, a la base minimale $(1, j, j^2, \ldots j^{m-1})$, 2) que le polynome $F(j)$ est irréductible suivant le module $n$, 3) que le module $n$ (degré de transformation) est un nombre naturel premier dans le corps $R_m(j)$, 4) que le polygone fondamental du groupe $(p, q, r)$ a un nombre fini de sommets. En conservant les notations de la note citée, nous désignons par $(p, q, r)$ le groupe discontinu de substitutions linéaires de la forme

$$(1) \qquad \frac{(a+b\sqrt{pq})z+(c\sqrt{r}+d\sqrt{p})\sqrt{q}}{(-c\sqrt{r}+d\sqrt{p})\sqrt{q}z+a-b\sqrt{pq}},$$

où $p, q, r$ sont trois nombres donnés du corps $R_m(j)$ et les nombres $a, b, c, d$ du corps $R_m(j)$ sont liés par la relation

$$a^2+c^2qr-p(b^2q+d^2r)=1.$$

Nous désignons encore par $G_e$ le groupe fini de toutes les substitutions (mod $n$)

---

[1]) Fricke, Vorlesungen über die Theorie d. automorphen Funktionen, Bd. I, p. 588.

$$\begin{pmatrix} a+b\sqrt{pq}, & (c\sqrt{r}+d\sqrt{p})\sqrt{q} \\ (-c\sqrt{r}+d\sqrt{p})\sqrt{q}, & a-b\sqrt{pq} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients $a, b, c, d$ satisfaisant à la congruence

$$a^2+c^2qr-p(b^2q+d^2r)\equiv 1 \pmod{n} \tag{2}$$

parcourrent le système complet de restes du corps $R_m(j)$ incongrus par rapport au module $n$; nous désignons par $G_{e_1}$ le groupe fini auquel se reduit le groupe $(p, q, r)$ par rapport au module $n$. Si les groupes $G_e$ et $G_{e_1}$ ne sont pas identiques le groupe $G_{e_1}$ sera un sous-groupe du groupe $G_e$ et l'on aura la relation $e=ke_1$, où le nombre $k$ désigne l'indice du groupe $G_{e_1}$ par rapport au groupe $G_e$. Nous étudierons les groupes $G_e$ et $G_{e_1}$ et nous allons voir que le cas $k>1$ pourra conduire à l'abaissement[1]) du degré de l'équation de transformation. Envisageons en premier lieu le groupe $G_{e_1}$ auquel se reduit le groupe $(p, q, r)$ suivant le module $n$.

§ 1. En désignant par $(*a, *b, *c, *d)$ les substitutions du groupe $G_{e_1}$ nous appellons équivalentes à $(*a, *b, *c, *d)$ les substitutions $(a, b, c, d)$ du groupe $(p, q, r)$ qui se reduisent $(\text{mod}\, n)$ à la substitution $(*a, *b, *c, *d)$; chaque substitutions $(*a, *b, *c, *d)$ du groupe $G_{e_1}$ *aura* ses équivalentes dans le groupe $(p, q, r)$, parce que le groupe $(p, q\ r)$ se reduit $(\text{mod}\, n)$ au groupe $G_{e_1}$. Mais cela n'aura pas lieu par rapport au groupe $G_e$; dans le cas, où l'indice $k$ est plus grande que 1, le groupe $G_e$ contiendra des substitutions qui *n'auront pas* d'équivalentes dans le groupe $(p, q, r)$. Observons encore que l'ensemble de toutes les substitutions du groupe $(p. q, r)$ équivalentes à une substitutions $(*a, *b, *c, *d)$ du groupe $G_{e_1}$ (différente de l'unité) ne formera pas, en général, un groupe.

Nous envisageons en premier lieu l'ensemble infini de substitutions $(a, b. c, d)$ du groupe $(p, q, r)$ *équivalentes* à 1; appellons cet ensemble $\Gamma$. L'ensemble $\Gamma$ formera évidemment un groupe. En effet, si l'on a deux substitutions $(a, b, c, d)$ et $(a', b', c', d')$ équivalentes à 1, on a

$$a\equiv 1,\quad b\equiv c\equiv d\equiv 0 \pmod{n},$$
$$a'\equiv 1,\quad b'\equiv c'\equiv d'\equiv 0 \pmod{n};$$

le produit $(a'', b'', c'', d'')$ de ces substitutions est donné par les formules:

---

[1]) Dans la note citée nous avons envisagés le cas $k=1$.

$$a'' = aa' + bb'pr - cc'qr + dd'pq,$$
$$b'' = ab' + ba' + cd'q - dc'q,$$
$$c'' = ac' + bd'p + ca' - db'p,$$
$$d'' = ad' + bc'r - cb'r + da,$$

d'où l'on déduit immédiatement les congruences

$$a'' \equiv 1, \quad b'' \equiv c'' \equiv d'' \equiv 0 \pmod{n}.$$

Nous demontrons le théorème suivant:

**Théorème I.** *L'indice du groupe $\Gamma$ par rapport au groupe $(p, q, r)$ est égale á $e_1$, où $e_1$ est le degré du groupe fini auquel se reduit* (mod $n$) *le groupe* $(p, q, r)$.

Soient

(4) $$1, V_2, V_3, \ldots$$

les substitutions du groupe $\Gamma$, c'est-à-dire les substitutions équivalentes à la substitution $(1, 0, 0, 0)$. Prenons une substitution $({}^*a, {}^*b, {}^*c, {}^*d)$ du groupe $G_{e_1}$; il existera toujours dans le groupe $(p, q, r)$ une substitution $(a, b, c, d)$ équivalente à la substitution $({}^*a, {}^*b, {}^*c, {}^*d)$; nous formons les produits

(5) $$(a, b, c, d), \quad (a,b,c,d)V_2, \quad (a, b, c, d)V_3, \ldots$$

Nous montrons que l'ensemble obtenu épuise toutes les substitutions du groupe $(p. q, r)$ *équivalentes* à la substitution $({}^*a, {}^*b, {}^*c, {}^*d)$; il suffira dans ce but de montrer qu'en général, chaque substitution $(a, b, c, d)$ du groupe $(p, q, r)$ équivalente à $({}^*a, {}^*b, {}^*c, {}^*d)$ *peut être* representée (d'une seule manière) comme le produit de la substitution $(a, b, c, d)$ et d'une certaine substitution $V_i$ équivalente à l'unité; cette substitution $(a, b, c, d)$ devra alors se trouver dans la suite (5), parce que la suite (4) épuise toutes les substitutions $\equiv 1 \pmod{n}$ du groupe $(p, q, r)$.

En effet, chaque substitution du groupe $(p, q, r)$ équivalente à 1 a la forme

$$(n\alpha + 1, n\beta, n\gamma, n\delta),$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres entiers du corps $R_m(j)$; chaque substitution du groupe $(p, q, r)$ équivalente à $({}^*a, {}^*b, {}^*c, {}^*d)$ a la forme

$$({}^*a + nA, {}^*b + nB, {}^*c + nC, {}^*d + nD),$$

où $A, B, C, D$ sont des nombres entiers du corps $R_m(j)$; il reste pour notre but à montrer qu'étant donnés quatre nombres $A, B, C, D$

du corps algébrique $R_m(j)$ on peut determiner les nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ du corps $R_m(j)$ satisfaisant à l'égalité

$$(a, b, c, d)(n\alpha + 1, n\beta, n\gamma, n\delta) = ({}^*a + nA, {}^*b + nB, {}^*c + nC, {}^*d + nD).$$

D'après les formules (3) donnant les coefficients du produit de deux substitutions $(a, b, c, d)$ on obtiendra les équations:

$$\begin{aligned} A' &= a\alpha + b\beta pr - cqr\gamma + dpq\delta, \\ B' &= b\alpha + a\beta \quad - dq\gamma + cq\delta, \\ C' &= c\alpha - dp\beta + a\gamma \quad + bp\delta, \\ D' &= d\alpha - cr\beta + br\gamma \quad + a\delta, \end{aligned}$$

où $A', B', C', D'$ sont certains nombres entiers du corps $R_m(j)$ (il faut se rappeller que le coefficient $a$ ne diffère de ${}^*a$ que par un multiple de $n$; le même se rapporte aux nombres $b, c, d$).

On demontre facilement que le determinant

$$\begin{vmatrix} a, & bpr, & -cqr, & dpq \\ b, & -a, & -dq, & aq \\ c, & -pd, & a, & bp \\ d, & -cr, & br, & a \end{vmatrix}$$

de ce système de quatre équations (par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) est égal au carré du determinant

$$a^2 + c^2 qr - p(b^2 r + d^2 q)$$

qui est égal à l'unité; on voit que les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seront entiers. Cela suffit pour montrer que chaque substitution $(a, b, c, d)$ du groupe $(p, q, r)$ équivalente à $({}^*a, {}^*b, {}^*c, {}^*d)$ peut être representée comme le produit de la substitution $(a, b, c, d)$ et d'une certaine substitution équivalente à 1.

Prenons maintenant une substitution $(a_1, b_1, c_1, d_1)$ du groupe $(p, q, r)$ équivalente à une autre substitution $({}^*a_1, {}^*b_1, {}^*c_1, {}^*d_1)$ du groupe $G_{e_1}$; nous obtenons la suite

(6) $\qquad (a_1, b_1, c_1, d_1), \quad (a_1, b_1, c_1, d_1)V_2, \quad (a_1, b_1, c_2, d_1)V_3, \ldots$

qui, comme la précédente, *épuisera* toutes les substitutions du groupe $(p, q, r)$ équivalentes à la substitution $({}^*a_1, {}^*b_1, {}^*c_1, {}^*d_1)$; on voit aisément que les suites (5) et (6) ne contiendront pas da substitutions égales; en effet, si l'on avait

$$(a, b, c, d) V_i = (a_1, b_1, c_1, d_1) V_j,$$

on aurait

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) = (a, b, c, d) V_j V_i^{-1};$$

le produit $V_j V_i^{-1}$ étant équivalente à l'unité, on voit que la substitution $(a_1, b_1, c_1, d_1)$ devrait alors se trouver dans la suite (5), ce qui est impossible, parce que la suite (5) est composée exclusivement de substitutions équivalentes à $(^*a, ^*b, ^*c, ^*d)$.

En prenant successivement toutes les substitutions du groupe $G_{e_1}$ on obtiendra d'une manière semblable $e_1$ suites telle que (5) ou (6) et l'on demontrera, par la méthode connue, que le groupe $\Gamma$ de substitutions équivalentes (mod $n$) à 1 a par rapport au groupe $(p, q, r)$ l'indice égale à $e_1$.

§ 2. Nous passons maintenant à l'égalité[1])

(7) $$(p, q, r) = (g_j, S_2 g_j, \ldots, S_j g_j),$$

où $g_j$ désigne le sous-groupe du groupe $(p, q, r)$ composé de substitutions $(a, b, c, d)$ satisfaisant à la congruence

$$d \equiv \omega b \pmod{n},$$

où $q\omega^2 \equiv -r \pmod{n}$, L'indice $j$ du groupe $g_j$ par rapport au groupe $(p, q, r)$ est égale au degré de l'équation de transformation de la fonction automorphe appartenant au groupe $(p, q, r)$.

Nous démontrons le théorème suivant:

**Théorème II**: *L'indice du sous-groupe $g_j$ par rapport au groupe $(p, q, r)$ est égale au quotient du degré $e_1$ du groupe $G_{e_1}$ par le degré du groupe fini $^*g_j$ auquel se reduit le groupe $g_j$ par rapport au module $n$.*

En effet, la première partie de l'égalité (7) se reduit (mod $n$) au groupe $G_{e_1}$. Le groupe $g_j$ qui figure dans cette égalité se reduit à l'ensemble de substitutions du groupe $G_{e_1}$ qui satisfont à la congruence

(8) $$^*d \equiv \omega\, ^*b \pmod{n}.$$

Inversement, chaque substilution $(^*a, ^*b, ^*c, ^*d)$ du groupe $G_{e_1}$ satisfaisant à la congruence (8) *aura* dans le groupe $(p, q, r)$ des substitutions équivalentes $(a, b, c, d)$ satisfaisant à la congruence

$$d \equiv \omega b \pmod{n},$$

---

[1]) Cf. la note citée: Transformation des fonctions automorphes.

parce que le groupe $G_{e_1}$ contient toutes les substitutions auxquelles se reguit le groupe $(p, q, r)$.

Envisageons les substitutions $S_2, S_3, \ldots S_j$. Désignons par $(a_2, {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d_2)$ la substitution du groupe $G_{e_1}$ à laquelle se reduit la substitution $S_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$; cette substitution $(a_2, b_2, c_2, d_2)$ n'entrera pas dans le groupe reduit ${}^*g_j$ parce que autrement la substitution $(a_2. b_2, c_2, d_2)$ devrait se trouver dans le groupe $g_j$, ce qui n'a pas lieu; la ligne $S_2 g_j$ se reduira à l'ensemble

$$({}^*a_2, {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d_2)\,{}^*g_j. \tag{9}$$

L'ensemble (9) n'aura pas de substitutions communes avec le groupe ${}^*g_j$, car désignant par $U$ et $U'$ deux substitutions du groupe ${}^*g_j$ on aurait alors

$$({}^*a_2, {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d_2)\, U = U',$$

d'où

$$({}^*a_2\ {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d) = U'U^{-1}$$

et la substitution $({}^*a_2, {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d_2)$ devrait faire partie du groupe ${}^*g_j$.

La substitution $(a_3, b_3, c_3, d_3) = S_3$ se reduira à la substitution $({}^*a_3, {}^*b_3, {}^*c_3, {}^*d_3)$ qui n'entrera ni dans le groure ${}^*g_j$ ni dans la ligne (9). Nous demontrons cela de la manière suivante: le groupe $g_j$ contient toutes les substitutions

$$1,\ V_2,\ V_3, \ldots$$

équivalentes (mod $n$) à 1 dont il était question plus haut (parce qu'elles vérifient la conquence $d \equiv \omega b$); la ligne $S_2 g_j$ *épuisera* par suite toutes les substitutions *équivalentes* à la substitution $({}^*a_2, {}^*b_2. {}^*c_2, {}^*d_2)$, parce qu'elle contiendra toutes les substitutions de la forme $(a_2, b_2, c_2, d_2) V_i$; la substitution $(a_3, b_3, c_3, d_3)$ devra donc être équivalente à une substitution autre que $({}^*a_2, {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d_2)$. Mais la substitution $(a_3, b_3, c_3, d_3)$ ne pourra aussi être équivalente à aucune substitution

$$({}^*a_2, {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d_2)\, U$$

de la ligne ${}^*S_2\,{}^*g_j$, parce que la ligne $S_2 g_j$ *épuise toutes* les substitutions équivalentes à la substitution $({}^*a_2, {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d_2)\, U$; en effet, pour obtenir *toutes* les substitutions équivalentes à la substitution $({}^*a_2, {}^*b_2, {}^*c_2, {}^*d_2)\, U$ il suffira, d'après ce qui a été dit plu haut (p. 3), de multiplier la substitution $(a_2, b_2, c_2, d_2)\, U$ par les substitutions $V_2, V_3, \ldots$ équivalente à 1; mais les substitutions ainsi obtenues

$$(a_2, b_2, c_2, d_2)\, U V_i$$

entrent dans la ligne $S_2 g_j$, parce qua la substitution $UV_i$ se trouve dans le groupe $g_j$. On voit qu'aucune substitution équivalente à $(^*a_2, ^*b_2, ^*c_2, ^*d_2)\, U$ ne se trouvera hors de la ligne $S_2 g_j$. La substitution reduite $(^*a_3, ^*b_3, ^*c_3, ^*d_3)$ n'entrera donc pas ni dans le groupe $^*g_j$ ni dans la ligne $^*S_2\, ^*g_j$.

La ligne $S_3 g_j$ se reduira ainsi (mod $n$) à l'ensemble

(10) $$(^*a_3, ^*b_3, ^*c_3, ^*d_3)\, ^*g_j$$

dont *toutes les substitutions seront différentes de celles du groupe* $^*g_j$ *et de la ligne* (9).

D'une manière semblable on obtiendra de nouvelles lignes

$$^*S_i\, ^*g_j \qquad (i = 2, 3, \ldots, j)$$

dont aucune ne contiendra d'élements communs avec les précédentes. On aura la décomposition de Lagrange du groupe $G_{e_1}$ en $j$ lignes suivant le groupe reduit $^*g_j$. Cela montre que le nombre $j$ dont il était question est égal à l'indice du groupe $^*g_j$ de substitutions $(^*a, ^*b, ^*c, ^*d)$ satisfaisant à la congruence $^*d \equiv \omega\, ^*b$, par rapport au groupe reduit $G_{e_1}$.

§ 3. Après ces remarques désignons par $g$ l'ensemble de substitutions du groupe $G_e$ satisfaisant à la congruence

(11) $$^*d \equiv \omega\, ^*b \pmod{n}.$$

Cet ensemble pourra être representé de la manière suivante:

(12) $$g = (^*g_j, T_1, T_2, \ldots, T_p),$$

où $T_i$ désignent les substitutions du groupe $G_e$ qui vérifient la congrnence (11), mais qui n'entrent pas dans le groupe $^*g_j$ auquel se reduisent les substitutions du groupe $(p, q, r)$ satisfaisant à la congruence $d \equiv \omega b \pmod{n}$; on a $p \geqslant 0$.

Nous avons désigné dejà l'indice du groupe

$^*g_j$ par rapport à $G_{e_1}$ par $j$,
$G_{e_1}$ " " $G_e$ " $k$,

nous désignons maintenant les indices du groupe

$^*g_j$ par rapport à $g$ par $k_1$,
$g$ " " $G_e$ " $j_1$.

On aura $kj = k_1 j_1$, parce qu'en désignant par $m$ le degré du groupe $^*g_j$ on a les égalités

$$e = mk_1 j_1 = mkj.$$

Envisageons en premier lieu le cas:

$$k_1 \leqslant k, \quad j_1 \geqslant j.$$

Nous démontrons le propriété suivante:

**Théorème III:** *Si l'indice $k_1$ du groupe $^*g_j$ par rapport au groupe $g$ est inférieure à l'indice $k$ du groupe $G_{e_1}$ par rapport a $G_e$, on a la relation*

$$j_1 - j = \frac{e}{M} \frac{k - k_1}{k},$$

*où $M$ désigne le degré du groupe $g$.*

Prenons la substitution $S_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ qui figure dans la formule (7); elle se reduit (mod $n$) à la substitution $^*S_2 = (^*a_2, ^*b_2, ^*c_2, ^*d_2)$ qui ne se trouvera pas parmi les substitutions

$$T_1, T_2, \ldots, T_p$$

de la formule (12), parce que la substitution $S_2$ ne satisfait pas à la congruence

$$d_2 \equiv \omega b_2 \pmod{n}.$$

Nous obtenons l'ensemble

(13) $$^*S_2 {}^*g_j, {}^*S_2 T_1, \ldots, {}^*S_2 T_p$$

composé de substitutions du groupe $G_e$.

Cet ensemble possédera les propriétés suivantes:

1) l'égalité $^*S_2 T_j = T_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$ sera impossible, car on aurait alors

$$^*S_2 = T_i T_j^{-1},$$

et la substitution $S_2$ devrait vérifier la congruence $d_2 \equiv \omega b_2$ (mod $n$),

2) la substitution $S_2 T_i$ n'entrera pas dans le groupe $^*g_j$, parce qu'en désignant par $U$ une substitution du groupe $^*g_j$ on aurait

$$^*S_2 T_i = U, \quad \text{d'où} \quad ^*S_2 = U T_i^{-1};$$

mais la substitution $S_2$ ne satisfait pas à la congruence $d_2 \equiv \omega b_2$ (mod $n$),

3) aucune substitution $T$ n'entre dans l'ensemble $^*S_2{}^*g_j$, parce qu'on aurait alors

$$^*S_2\,U = T, \quad \text{où} \quad ^*S_2 = TU^{-1},$$

où $U$ désigne une substitution du groupe $^*g_j$, mais la substitution $^*S_2$ ne satisfait pas à la congruence $d_2 \equiv \omega b_2$,

4) l'ensemble $^*S_2{}^*g_j$ n'a pas de substitutions communes avec le groupe $^*g_j$ (d'après le théorème II).

La substitution $^*S_3 = (^*a_3, {}^*b_3, {}^*c_3, {}^*d_3)$ à laquelle se reduit la substitution $S_3$ figurant dans la formule (7), ne se trouvera pas parmi les substitutions $T_i$ et $^*S_2\,T_i$ parce que les substitutions $T_i$ et $^*S_2\,T_i$ sont du nombre de celles auxquelles ne se reduisent pas (mod $n$) les substitutions du groupe $(p, q, r)$. Nous obtenons la suite.

(14) $$^*S_3{}^*g_j, {}^*S_3\,T_1, {}^*S_3\,T_2, \ldots, {}^*S_3\,T_p$$

qui n'aura pas des substitutions égales. La suite obtenue possèdera les propriétés suivantes:

1) l'égalité

$$^*S_3\,T_i = {}^*S_2\,T_j$$

n'aura pas lieu, parce qu'on aurait alors

$$^*S_2^{-1}{}^*S_3 = T_j T_i^{-1}$$

et la substitution $^*S_2^{-1}{}^*S_3 =$ devrait vérifier la congruence $d \equiv \omega b$ (mod $n$); cette substitution devrait donc: a) ou se trouver parmi les substitutions $T_i$ ou b) entrer dans le groupe $^*g_j$. Mais la substitution $^*S_2^{-1}{}^*S_3$ ne peut être égale à $T_i$, parce que le produit $^*S_2^{-1}{}^*S_3$ doit être en chaque cas une substitution de nombre de celles, auquelles se reduit le groupe $(p, q, r)$; de même on ne peut pas avoir (en désignant par $U$ une substitution du groupe $^*g_j$)

$$^*S_2^{-1}{}^*S_3 = U,$$

parce qu'il serait alors $^*S_3 = {}^*S_2\,U$ et la substitution $^*S_3$ se trouverait dans la ligne (9) de la décomposition du groupe $G_{e_1}$ (p. 6),

2) la substitution $^*S_3\,T_i$ n'entrera pas dans la ligne $^*S{}^*g_j$, parce qu'on aurait alors

$$^*S_3\,T_i = {}^*S_2\,U,$$

d'où

$$T_i = {}^*S_3^{-1}{}^*S_2\,U,$$

et la substitution $T_i$ devrait se trouver dans le groupe $G_{e_1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que la substitution $T_i$ appartient au

nombre de substitutions auxquelles ne se reduit pas le groupe $(p, q, r)$,

3) la substitution $^*S_2 T$ n'entre pas dans la ligne $^*S_3 {}^*g_j$, parce qu'on aurait alors

$$^*ST = {}^*S_3 U,$$

ce qui est impossible (comme plus haut),

4) les ensembles $^*S_3 {}^*g_j$ et $^*S_2 {}^*g_j$ n'ont pas de substitutions communes, car on aurait alors (en désignant par $U_1$ et $U_2$ deux substitutions du groupe $^*g_j$)

$$^*S_3 U_1 = {}^*S_2 U_2,$$

d'où $^*S_3 = {}^*S_2 U_2 U_1^{-1} = {}^*S_2 U$, où l'on a posé $U = U_2 U_1^{-1}$; la substitution $S_3$ devrait donc entrer dans la ligne (13).

Nous obtenons le tableau suivant

$$\begin{array}{ccccc} ^*g_j, & T_1, & T_2, \ldots, & T_p, \\ ^*S_2 {}^*g_j, & ^*S_2 T_1, & ^*S_2 T_2, \ldots, & ^*S_2 T_p, \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ldots & \vdots \\ ^*S_j {}^*g_j, & ^*S_j T_1, & ^*S_j T_2, \ldots, & ^*S_j T_p, \end{array}$$

composé de substitutions du groupe $G_e$ *toutes différentes.*

Si ce tableau n'épuise pas toutes les substitutions du groupe $G_e$, nous obtiendrons encore $j_1 - j$ lignes; il sera

$$j_1 = \frac{e}{M};$$

où $M$ désigne le degré du groupe $g$.

Observons maintenant qu'en vertu du théorème II, le degré $e_1$ du groupe $G_{e_1}$ est égal au produit de l'indice $j$ et du degré du groupe de substitutions reduites $({}^*a, {}^*b, {}^*c\ {}^*d)$ satisfaisant à la congruence $^*d \equiv \omega {}^*b \pmod n$ et faisant partie du groupe $G_{e_1}$. Mais le degré de ce groupe est $M : k_1$, on a donc

$$e_1 = j \frac{M}{k_1};$$

on a $e = e_1 k$, parce que l'indice du groupe $G_{e_1}$ par rapport à $G_e$ est $k$, on a donc:

$$\frac{e}{k} = j \frac{M}{k_1},$$

d'où

$$j_1 - j = \frac{e}{M} \cdot \frac{k - k_1}{k}.$$

§ 4. Passons maintenant au second cas $k_1 > k$. Nous avons le théorème suivant:

**Théorème IV:** *L'indice $k_1$ du groupe $^*g_j$ par rapport à $g$, ne peut pas surpasser l'indice du groupe $G_{e_1}$ par rapport à $G_e$.*

En effet; représentons le groupe $G_{e_1}$ dans le tableau suivant

$$\begin{array}{c} ^*g_j, \\ ^*S_2\,{}^*g_j, \\ \vdots \\ \vdots \\ ^*S_j\,{}^*g_j, \end{array}$$

et envisageons le groupe

$$g = (^*g_j, T_1, T_2 \ldots, T_p),$$

où $T_i$ sont des substitutions du groupe $G_e$ qui vérifient la congruence $^*d \equiv \omega\, ^*b \pmod n$, mais n'entrent pas dans le groupe $^*g_j$.

Prenons une des substitutions $T$, par exemple $T_2$: alors dans le tableau

$$\begin{array}{c} ^*g_j\,T_2, \\ ^*S_2\,{}^*g_j\,T_2, \\ \vdots \\ \vdots \\ ^*S_j\,{}^*g_j\,T_2. \end{array}$$

l'ensemble $^*g_j\,T_2$ sera composé exclusivement de substitutions $T$ différentes entre elles. Les ensembles

(15) $$^*S_2\,{}^*g_j\,T_2, \ldots, {}^*S_j\,{}^*g_j\,T_2$$

et les ensembles

(16) $$^*S_2\,{}^*g_j, \ldots, {}^*S_j\,{}^*g_j$$

ne contiendront pas de substitutions communes. En effet, en désignant par $U$ une substitution du groupe $^*g_j$ on aurait:

$$^*S_m\,U = {}^*S_n\,U_1\,T_2, \qquad (m, n = 2, 3, \ldots, j)$$

d'où

$$T_2 = U_1^{-1}\,{}^*S_n\,{}^*S_m\,U;$$

mais les substitutions $*S$ et $*U$, étant reduites du groupe $(p, q, r)$ entrent dans le groupe $G_{e_1}$, donc la substitution $T_2$ devrait alors entrer dans le groupe $G_{e_1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur les substitutions $T$. L'ensemble (16) n'aura donc pas de substitutions communes avec l'ensemble (15).

En prenant successivement une substitution $T_3$ qui n'entre pas dans l'ensemble $*g_j T_2$, une autre $T_4$ qui n'entre pas dans les ensembles $*g_j T_2$, $*g_j T_3$ et ainsi de suite, on obtiendra le tableau

(17)
$$\begin{array}{l} *g_j, \quad *g_j T_2, \ldots, \quad *g_j T_k, \\ *S_2 *g_j, *S_2 *g_j T_2, \ldots, *S_2 *g_j T_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ *S_j *g_j, *S_j *g_j T_2, \ldots, *S_j *g_j T_k, \end{array}$$

dans lequel aucune de deux colonnes ne contiendra d'élements communes. En effet, il suffira démontrer dans ce but l'impossibilité de 5 égalités suivantes

$$\begin{aligned} S_r U_j' T_s &= S_i U_j T_l, \\ S_r U_j &= S_i U_j T_l, \\ U_j' &= S_i U_j T_l, \\ S_r U_j' T_s &= U_j T_l, \\ S_r U_j' &= U_j T_l, \end{aligned}$$

où l'on a posé: $r, i = 2, 3, \ldots, j$; $l, s = 2, 3, \ldots, k$ et les $U$ désignent les substitutions du groupe $*g_j$.

Il suffira de démontrer l'impossibilité de la première égalité. En effet, si nous avions

$$S_r U_j' T_s = S_i U_j T_l,$$

on aurait alors

$$T_l T_s^{-1} = U_j^{-1} S_i^{-1} S_r U_j'$$

et le produit

(18)
$$U_j^{-1} S_i^{-1} S_r U_j'$$

étant égal à $T_l T_s^{-1}$, devrait vérifier la congruence

$$d \equiv \omega b \pmod{n};$$

il devrait donc: a) ou être une de substitutions $T$ ou b) appartenir au groupe $*g_j$. La première hypothèse est impossible, parce que les $T$ sont les substitutions du groupe $G_e$ auxquelles ne se reduisent

pas (mod $n$) les substitutions du groupe $(p, q, r)$ et les substitutions $S$ et $U$ appartiennent au groupe $G_{e_1}$. La seconde hypothèse que le produit (18) appartienne au groupe $*g_j$ conduit à l'égalité

$$U_q = U_j^{-1} S_i^{-1} S_r U'_j,$$

où $U_q$ désigne une substitution du groupe $*g_j$. Mais on aurait alors

$$S_r U'_j = S_i U_j U_q$$

ce qui dans le cas $r \neq i$ est en contradiction avec la decomposition

$$G_{e_1} = (*g_j, S_2 *g_j, \ldots)$$

du groupe $G_{e_1}$ par rapport à $*g_j$; dans le cas $r = i$ on aurait

$$U' T_s = U T_l,$$

d'où $T_l = U^{-1} U' T_s$ ce qui est impossible.

Le tableau contient donc

$$mkj$$

substitutions différentes du groupe $G_{e_1}$; ce tableau répresente donc le groupe $G_e$ entier et l'on ne peut pas avoir $k_1 > k$.

§ 5. Revenons maintenant au cas $k_1 \leqslant k$ envisagé auparavant; nous avons trouvé l'expression

$$j = \frac{e}{M} \cdot \frac{k_1}{k}$$

qui donnera dans notre cas le degré de l'équation de transformation pour la fonction automorphe appartenant au groupe $(p, q, r)$. Le degré $e$ du groupe $G_e$ qui est égal au nombre de solutions de la congruence

$$a^2 + c^2 qr - p(b^2 q + d^2 r) \equiv 1 \pmod{n},$$

est, d'après la note citée, égal au nombre $n^m(n^{2m} - 1):2$: le degré $M$ du groupe $*g_j$ que est égal au nombre de solutions dans le corps $R_m(j)$ de la congruence $a^2 + c^2 qr \equiv 1 \pmod{n}$, est donné par la formule $n^m(n^m - 1):2$. On obtient le resultat suivant:

**Théorème V:** *Si l'indice $k_1$ du groupe $*g_j$ par rapport au groupe $g$ est inférieure à l'indice $k$ du groupe $G_{e_1}$, par rapport à $G_e$ le degré de l'équation de transformation de la fonction automorphe appartenant au groupe $(p, q, r)$ défini dans le corps $R_m(j)$ a l'expression $(n^m + 1) k_1 : k$.*

---

# Sur un théorème de Mr J. L. Walsh.

Par

M. Jules Rudnicki à Wilno.

Monsieur Walsh a demontré le théorème suivant (Annales of Mathematics (2), t. 25, an. 1924):

„Toutes les racines de l'équation de degré $n$

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

sont contenues dans le cercle décrit de l'origine avec le rayon

$$R = |a_1| + \sqrt{|a_2|} + \sqrt[3]{|a^3|} + \dots + \sqrt[n]{|a_n|}\text{“}.$$

Si donc $z_k$ est une racine quelconque de l'équation précédente, on a

$$|z_k| \leqslant R.$$

J'ai trouvé une démonstration élémentaire de cette proposition. Comme elle est extrêmement simple et très courte, je crois, qu'elle peut intéresser les mathématiciens et c'est pourquoi je la publie.

**Notations.** Posons: $P_1(z) = a_0 z + a_1$, $P_2(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$, $P_k(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_{k-1} z + a_k$. On a alors

(1) $$P_k(z) = z P_{k-1}(z) + a_k.$$

Considérons l'équation

(2) $$P_{k-1}(z) = 0$$

et soient $z_j^{(k-1)}$ les zéros $(j = 1, 2, 3, \dots, k-1)$ de cette équation. Soit $D_{k-1}$ un domaine convexe contenant l'origine et toutes les ra-

cines $z_j^{(k-1)}$ de l'équation (2); ces points peuvent être situés sur la frontière du domaine $D_{k-1}$.

Soit encore l'équation

(3) $$P'_{k-1}(z) = 0,$$

et $\zeta_s$ les zéros ($s = 1, 2, 3, \ldots, k-2$) de cette équation.

On sait que tous ces pts $\zeta_s$ appartiennent au domaine $D_{k-1}$. Soit enfin $z_k$ un zéro quelconque de l'équation

(4) $$P_k(z) = 0$$

situé en dehors de $D_{k-1}$, s'il y en a. En vertu de (1) on a:

(5) $$P_{k-1}(z_k) = -\frac{a_k}{z_k}.$$

Considérons la distance minima du pt $z_k$ au domaine fermé $D_{k-1}$ et désignons la par $\delta_k$. De la définition de $\delta_k$ il résulte, que l'on a $|z_k - z| \geqslant \delta_k$ toutes les fois que $z$ appartient à $D_{k-1}$. En particulier on aura:

(6) $$|z_k - z_j^{(k-1)}| \geqslant \delta_k \quad \text{et} \quad |z_k - \zeta_s| \geqslant \delta_k$$

pour $j = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ et $s = 1, 2, 3, \ldots, k-2$.

Passons à la démonstration. Pour cela partons de la dérivée logarithmique:

(7) $$v(z) = \frac{P'_{k-1}(z)}{P_{k-1}(z)} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{z - z_j^{(k-1)}};$$

substituons dans cette formule $z_k$, racine de (4), à la place de $z$, remplaçons $P'_{k-1}(z_k)$, par le produit $(k-1)a_0 \prod_{s=1}^{k-2}(z_k - \zeta_s)$ et $P_{k-1}(z_k)$, par son expression (5). Il vient:

$$v(z_k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{z_k - z_j^{(k-1)}} \quad \text{et} \quad v(z_k) = -\frac{a_0}{a_k} \cdot z_k(k-1) \prod_{s=1}^{k-2} (z_k - \zeta_s).$$

Evaluons le module de $v(z_k)$. D'un part on a

(8) $$|v(z_k)| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{|z_k - z_j^{(k-1)}|} \leqslant \frac{k-1}{\delta_k},$$

et d'autre part

$$(9) \qquad |v(z_k)| = (k-1)\left|\frac{a_0}{a_k}\right| \prod_{s=1}^{k-2} |z_k - \zeta_s| \cdot |z_k| \geqslant (k-1)\left|\frac{a_0}{a_k}\right| (\delta_k)^{k-1};$$

de la comparaison de (8) et (9) il résulte que

$$(k-1)\left|\frac{a_0}{a_k}\right| (\delta_k)^{k-1} \leqslant \frac{k-1}{\delta_k}, \quad \text{d'où}$$

$$(10) \qquad \delta_k \leqslant \sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}.$$

Ce résultat exprime, que la distance minima de toute racine (extérieur à $D_{k-1}$) de l'équation (4) au domaine $D_{k-1}$ est inférieur ou tout au plus égale à $\sqrt[k]{|a_k|}$ en supposant $a_0 = 1$.

Si donc on considère le domaine $D_k$ contenant $D_{k-1}$ et formé par l'enveloppe des cercles de rayon $\sqrt[k]{|a_k|}$ dont lès centres sont situées sur le contour de $D_{k-1}$, toutes les racines $z_k$ de l'équation (4) appartiendront au domaine $D_k$, qui sera aussi convexe.

La démonstration se termine par induction. Si $k = 1$, on a l'équation $P_1(z) = 0$ et son unique racine est $-\frac{a_1}{a_0}$ c. à. d. $-a_1$ si $a_0 = 1$, et on peut prendre pour $D_1$ le cercle de rayon $|a_1|$. Il résulte de ce qui précéde, que l'on peut prendre comme $D_2$ l'enveloppe des cercles de rayon $\sqrt{|a_2|}$ dont les centres sont situés sur le cercle $D_1$. C'est un cercle de rayon $|a_1| + \sqrt{|a_2|}$ et de centre origine et toute les racines de $P_2(z) = 0$ appartiennent à ce cercle. De proche en proche on arrive à conclure que toutes les racines de l'équation $P_n(z) = 0$ sont (pour $a_0 = 1$) à l'intérieur ou sur le contour du cercle de rayon $|a_1| + \sqrt{|a_2|} + \ldots + \sqrt[n]{|a_n|}$ et de centre origine. C'est le téorème de Mr Walsh.

**Remarque I.** On peut obtenir sur la situation des racines de l'équation $P_n(z) = 0$ une indication plus précise en prenant pour $D_1$ le segment, joignant l'origine au pt. $-\frac{a_1}{a_0}$. Alors le domaine $D_2$ est formé par un rectangle conjointement avec deux demi-cercles est ne constitue qu'une partie du domaine en cercle de Mr Walsh.

Bibl. Jag.

De même $D_n$ sera un domaine dont la frontière est formée par des segments de droites et des demi-cercles et ne constituera qu'une partie du cercle de rayon $R$, a moins que $a_1 = 0$.

**Remarque II.** Nos considérations concernaient le cas où $a_n \neq 0$. Il est facile de les étendre pour le cas $a_n = 0$. En effet, on a alors $P_n(z) \equiv z \cdot P_{n-1}(z)$, c. à. d. que les racines des deux équations $P_n(z) = 0$ et $P_{n-1}(z) = 0$ sont les mêmes à la racine $z = 0$ près. Si donc la limite de Mr Walsh pour l'équation $P_{n-1}(z) = 0$ est $|a_1| + \sqrt{|a_2|} + \ldots + \sqrt[n-1]{|a_{n-1}|}$, elle sera la même pour l'équation $P_n(z) = 0$, c. à. d. $|a_1| + \sqrt{|a_1|} + \ldots + \sqrt[n-1]{|a_{n-1}|} + \sqrt[n]{|a_n|}$, puisque $a_n = 0$.

**Remarque III.** La limite de Mr Walsh est effectivement atteinte quand le polynôme $P_n(z)$ se reduit à 2 termes, c. à. d. quand $P_n(z) \equiv z^n + a_k z^{n-k}$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Il est facile de démontrer que c'est le seul cas où la limite soit effectivement atteinte. Pour plus de généralité supposons que tous les $a_{k+p} = 0$, $(p = 1, 2, \ldots, n-k)$, mais $a_k \neq 0$. Nous avons obtenu les relations:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{k-1}{\delta_k} &\geqslant \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{z_n - z_j^{(k-1)}} \geqslant \left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{z_n - z_j^{(k-1)}} \right| = \\ &= \frac{|z_n|}{|a_k|} \prod_{s=1}^{n-2} |z_n - \zeta_s| \cdot (n-1) \geqslant \frac{k-1}{|a_k|} (\delta_k)^{k-1}, \end{aligned}$$

où $z_n$ est une racine de $P_n(z) = 0$ différente de zéro, c. à. d. aussi une racine de $P_k(z) = 0$, puisque $P_n(z) = z^{n-k} \cdot P_k(z)$. Pour que la limite soit atteinte, c. à. d. pour que $|z_n| = R$ il est nécessaire que les termes extrêmes des relations (10) soient égaux, ce qui entraine à son tour l'égalité de tous les autres termes de (10). On en tire une série de conséquences, à savoir: 1° le point $z_n$ et tous les $k-1$ points $z_j^{(k-1)}$ sont situés sur une même droite, 2° $|z_n - z_j^{(k-1)}| = \delta_k$ pour $j = 1, 2, \ldots, k-1$, et aussi $|z_n| = \delta_k$, c. à. d. que les pts $z_j^{(k-1)}$ et l'origine sont à la même distance du pt. $z_n$. Comme $z_n$ doit être situé plus loin de l'origine que les pts $z_j^{(k-1)}$, il en résulte que toutes les racines de $P_{k-1}(z) = 0$ sont en un seul pt., c. à. d. que $P_{k-1}(z) \equiv$ $\equiv (z - \lambda)^{k-1}$ en posant $z_j^{(k-1)} = \lambda$ pour $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Alors $P_k(z) = z(z-\lambda)^{k-1} + a_k$. La limite de Mr Walsh ne peut être at-

teinte pour $P_n(z)=0$ que si elle est atteinte aussi pour tous les polynômes précédents, elle doit donc être atteinte pour $P_{k-1}(z)$; si donc $\lambda \neq 0$, on peut appliquer les considérations précédentes au polynôme $P_{k-1}(z)$ et on a $P_{k-1}(z) \equiv z(z-\mu)^{k-2} + a_{k-1} \equiv (z-\lambda)^{k-1}$; en dérivant, on voit que $\mu = \lambda$, c. à. d. $(z-\lambda)^{k-1} \equiv z(z-\lambda)^{k-2} + (-\lambda)^{k-1}$ ou bien

$$(-\lambda)\{(z-\lambda)^{k-2} - (-\lambda)\} \equiv 0,$$

ce qui est impossible pour $k > 2$, a moins que $\lambda = 0$. Supposons donc $k > 2$, alors $\lambda = 0$ et

$$P_k(z) \equiv z^k + a_k, \quad \text{tandis que} \quad P_n(z) \equiv z^{n-k} \cdot P_k(z) \equiv z^n + a_k z^{n-k}.$$

Le polynôme $P_n(z)$ a donc la forme voulue. Le cas de $k=2$ ne fait pas exception, comme on s'en rend compte directement par la considération du trinôme du 2-me degré.

---

# Sur le théorème intégral de Cauchy.

Par

W. Wilkosz (Cracovie).

[Communiqué à la Soc. Pol. de Math. le 21. II. 1933].

Une généralisation du théorème bien connu de Cauchy sur les conditions pourqu'une expression de la forme

$$pdx + qdy$$

représente dans un domaine donné la différentielle totale d'une fonction à deux variables indépendentes, a été énnoncé sans démonstration par M. Paul Montel en 1913 dans les Comptes Rendus de l'Académie de Paris.

En généralisant encore les conditions de M. Montel sous lesquelles le théorème devrait être vrai, M. Looman dans un travail inséré dans les „Göttingen Nachrichten" (1924) a essayé d'en donner une démonstration fort intéressante. Malheuresement il y a là une grave lacune [1]) et le théorème, aussi important en lui-même que par ses applications, surtout au problème des équations de Cauchy-Riemann est resté sans preuve rigoureuse.

Pendant le Congrés International de Zurich (1932) on m'a raconté que M. Menchoff (Moscou) possède une démonstration du théorème de M. Montel qui ne fût pas encore publiée et dont je ne possède pas la connaissance. Je me propose de ma part de prouver le théorème en question en me servant des considérations que j'ai developpé dans mon travail lu devant la Société Mathématique Polonaise sous le titre „Les applications de la théorie de la totali-

[1]) v. Ridder, Math. Annalen Bd. 102.

sation à la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles du type élliptique“ pendans les séances des 22. I et 29. I, 1927 [1]) à Cracovie. Je me suis aperçu que les resultats que j'ai obtenu suffisent pour rectifier la démonstration de M. Looman et cela de la manière suivante:

**Théorème:** Soient $p(xy)$ et $q(xy)$ deux fonctions continues dans le rectangle $R$ et ayant à son intérieur des dérivées partielles $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ *finies.* Supposons la relation:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

remplie *presque partout* dans $R$.

Dans ce cas

$$p(xy)\,dx + q(xy)\,dy$$

représente la différentielle totale d'une fonction $V(xy)$ définie dans le rectangle $R$.

**Démonstration.** 1. Il suffit, comme le fait M. Looman, de prouver que, pour chaque rectangle $r\left\{\begin{smallmatrix} a, & b \\ c, & d \end{smallmatrix}\right\}$ contenu dans $R$, l'intégrale:

$$I_r = \int_{(r)} p\,dx + q\,dy$$

s'évanouit.

Il suffit même de savoir que $I(r) = 0$ pour chaque *carré* $r$ contenu dans $R$. Cela résulte du fait que $I(\varrho)$ varie continument lorsque on fait varier d'une manière continue son contour et que

$$\int_r p\,dx + q\,dy = \int_{r_1} p\,dx + q\,dy + \int_{r_2} p\,dx + q\,dy$$

lorsq'on partage le rectangle $r$ en deux autres contigus $r_1$ et $r_2$.

2. M. Looman considère l'ensemble $M$ de tous les points tels que dans la proximité arbitraire du chacun d'eux se trouvent des rectangles $\varrho$ pour lesquels $I(\varrho)$ est différent de zéro.

Il faut démontrer que l'ensemble $M$ est *vide.* En tous cas l'ensemble $M$ est *parfait.*

---

[1]) v. le résumé dans les Annales de la Soc. Pol. de Math. v. VI p. 118.

3. Voici un lemme dont la démonstration *exacte* se trouve dans le travail de M. Looman:

**Lemme:** Lorsque dans un rectangle $r$ la partie de l'ensemble $M$ qui y est contenue, soit $\sigma(r)$, n'est pas *vide*, il existe dans $r$ un autre rectangle (même un carré) $\bar{r}$ possédant les propriétés suivantes:

1° l'ensemble $\sigma(\bar{r})$ n'est pas vide,

2° les accroissements:

$$\frac{p(x, y') - p(x, y'')}{y' - y''}$$

$$\frac{q(x', y) - q(x'', y)}{x' - x''}$$

considérés dans le rectangle $\bar{r}$ mais soumis à la condition que l'un au moins des points $(x', y)$ et $(x'', y)$ et l'un des points $(x, y')$ et $(x, y'')$ appartiennent à l'ensemble $M$ (ou $\sigma(\bar{r})$), sont bornées en valeur absolue dans $\bar{r}$.

4. Considérons un tel rectangle $r$ et supposons donc que:

$$\left|\frac{p(x, y'') - p(x, y')}{y'' - y'}\right| \leqq A$$

$$\left|\frac{q(x'', y) - q(x', y)}{x'' - x'}\right| \leqq A$$

(avec des restrictions citées plus haut) et que l'ensemble $\sigma(r)$ *n'est pas vide*. Il est clair, que:

$$\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \leqq A, \quad \left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| \leqq A$$

pour les points de l'ensemble $\sigma(r)$. M. Looman nous propose dans son travail l'évaluation suivante de l'intégrale $I(r)$:

$$|I(r)| \leqq 2\,A.\,\text{mesure}\,\{r - \sigma(r)\}.$$

Or c'est le point défectueux de son travail. Nous alons remplacer son évaluation par une autre:

$$|I(r)| \leqq 8\,A.\,\text{mesure}\,\{r - \sigma(r)\} \qquad (\omega')$$

et cela *seulement* pour les *carrés* $r$ satisfaisants aux conditions précédentes.

5. Soit donc $r$ le carré $r\left\{\begin{smallmatrix} m, & n \\ m, & n \end{smallmatrix}\right\}$ c'est à dire formé par des points:

$$(m, m), \quad (m, n), \quad (n, m), \quad (n, n) \qquad (m < n)$$

remplissant les conditions demandées. On peut, en transportant les côtés du carré $r$ vers son intérieur, trouver un rectangle $\bar{r}\left\{\begin{smallmatrix} a, & b \\ c, & d \end{smallmatrix}\right\}$ contenu dans $r$ et tel que:

1⁰ l'ensemble $r - \bar{r}$ ne possède pas à son intérieur de points de $M$, donc

$$\sigma(r) = \sigma(\bar{r}) + W$$

mes. $(W) = 0$, ($W$ situé sur les côtés du rectangle $\bar{r}$),

2⁰ sur *chaque* côté du rectangle $\bar{r}$ soit situé *au moins un point de l'ensemble M.*

En remarquant avec M. Looman, que pour un rectangle $\varrho$ dépourvu à son intérieur de points de l'ensemble $M$ on a toujours

$$I(\varrho) = 0$$

on peut en conclure facilement, que:

$$I(r) = I(\bar{r}).$$

Désignons par $E$ la projection de l'ensemble $\sigma(\bar{r})$ sur l'axe des $x$ et soient:

(1) $\sigma_{\bar{x}}$ l'intersection de $\sigma(\bar{r})$ par la droite $x = \bar{x}$, lorsque $\bar{x}$ appartient à $E$;

(2) $\gamma_i(\bar{x})$, $\delta_i(\bar{x})$ les ordonnées des extrémités des intervalles complémentaires déterminés par $\sigma_{\bar{x}}$ sur le segment:

$$c \leqq y \leqq d \quad x = \bar{x}.$$

On a:

$$I(r) = I(\bar{r}) = \int_a^b \{p(x, d) - p(x, c)\}\, dx + \int_c^d \{q(a, y) - q(b, y)\}\, dy.$$

Envisageons l'intégrale:

$$I_1 = \int_a^b \{p(x, d) - p(x, c)\}\, dx =$$

$$= \int_E \{p(x, d) - p(x, c)\}\, dx + \int_{(a,b)-E} \{p(x, d) - p(x, c)\}\, dx.$$

Or pour les $x$ appartènant à l'ensemble $E$ on a:

$$p(x, d) - p(x, c) = \int\limits_{\sigma_x} \frac{\partial p}{\partial y} dy + \sum_{(l)} \{p(x, \delta_l(x) - p(x, \gamma_l(x))\}$$

grâce à un théorème de M. Denjoy et aux conditions auquelles est soumis le rectangle $r$ [1]).

L'un au moins des points $(x, \gamma_l(x))$, $(x, \delta_l(x))$ appartenant à l'ensemble $\sigma(r)$ on aura donc:

$$\left| \{p(x, d) - p(x, c)\} - \int\limits_{\sigma_x} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right| \leqq A \sum_{l} [\delta_l(x) - \gamma_l(x)].$$

Pour les $x$ appartenant à l'ensemble $(ab) - A$ on a maintenant une sérieuse difficulté. Elle consiste en ce que les points $(x, d)$ et $(x, c)$ n'appartenant pas à l'ensemble $\sigma(r)$, on n'a pas y droit de poser:

$$|p(x, d) - p(x, c)| \leqq A(d - c).$$

Nous alons lever cette difficulté par l'artifice suivant:

Choisissons deux points:

$$(x_1, c) \quad \text{et} \quad (x_2, d)$$

appartenant a l'ensemble $\sigma(\overline{r})$ et situés sur les côtés du rectangle $\overline{r}$.

On aura:

$$\begin{aligned} p(x, d) - p(x, c) = p(x, d) & - p(x_2, d) \\ + p(x_2, d) & - p(x_2, c) \\ + p(x_2, c) & - p(x_1, c) \\ + p(x_1, c) & - p(x, c). \end{aligned}$$

L'une au moins des extrémitées des segments considérés étant toujours un point de $M$, on a:

$$|p(x, d) - p(x, c)| \leqq A(c - d) + 3A(b - a).$$

En résumé on aura l'évaluation suivante:

$$\left| \int\limits_a^b \{p(x, d) - p(x, c)\} - \int\limits_E dx \int\limits_{\sigma_x} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right| \leqq A \operatorname{mes} \{\overline{r} - \sigma(\overline{r})\} +$$
$$+ 3A \operatorname{mes} (ab) - E\} \cdot (b - a).$$

---

[1]) v. Looman loc. cit.

Symétriquement on aura:

$$\left|\int_c^d \{q(a, y) - q(b, y)\} dy + \int_{\bar{E}} dy \int_{\sigma_y} \frac{\partial q}{\partial x} dx\right| \leqq A \text{ mes} \{r - \sigma(\bar{r})\} +$$

$$+ 3A \text{ mes} \{(c, d) - \bar{E}\} (d - c)$$

[$\bar{E}$ et $\sigma_y$ désignent les ensembles analogues aux ensembles $E$ et $\sigma_x$].

Les dérivées $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ étant bornées sur $\sigma(\bar{r})$ on peut appliquer le théorème de Fabini:

$$\iint_{\sigma(\bar{r})} \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = \int_E dx \int_{\sigma_x} \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

$$\iint_{\sigma(\bar{r})} \frac{\partial q}{\partial x} dx dy = \int_{\bar{E}} dy \int_{\sigma_y} \frac{\partial q}{\partial x} dx.$$

D'autre part on a presque partout

$$p'_y = q'_x$$

les intégrales ont alors la même valeur. En faisant la somme, nous obtenons:

$$\begin{aligned} |I(\bar{r})| &\leqq 2A.\text{mes} \{\bar{r} - \sigma(\bar{r})\} \\ &+ 3A.\text{mes} \{(a, b) - E\} \cdot (b - a) \\ &+ 3A.\text{mes} \{(c, d) - \bar{E}\} \cdot (d - c). \end{aligned}$$

Heuresement on a:

$$I(r) = I(\bar{r}), \quad \text{mes}.\sigma(r) = \text{mes}.\sigma(\bar{r})$$

$$n - m \geqq b - a, \quad n - m \geqq d - c$$

donc:

$$\begin{aligned} |I(r)| &\leqq 2A.\text{mes} (r - \sigma(r)) \\ &+ 3A.\text{mes} \{(m, n) - \varepsilon\} \cdot (n, m) \\ &+ 3A.\text{mes} \{(m, n) - \bar{\varepsilon}\} \cdot (n, m) \\ &\leqq 8A.\text{mes} \{r - \sigma(r)\}. \end{aligned} \qquad (\omega')$$

ou encore:

$$\frac{I|(r)|}{\text{mes} (r)} \leqq 8A \frac{\text{mes}\{\sigma(r)\}}{\text{mes} (r)} \qquad (\omega'')$$

L'évaluation $(\omega')$ ou $(\omega'')$ reste évidemment valable pour chaque carré $\varrho$ contenu entièrement dans $r$.

Soit $P(x, y)$ un point quelconque du carré $r$ et désignons par $\sigma(x, y)$ la limite:

$$s(x, y) = \lim\sup \frac{I(\varrho)}{\text{mes}\,(\varrho)}$$

lorsque le carré $\varrho$ est contenu dans $r$ en contenant le point $P$ et lorsque la longeur de son coté tend vers zéro.

On voit immédiatemment que:

(1) $s(x, y) = 0$ pour chaque point de l'ensemble $r - \sigma(r)$.

(2) $s(x, y) = 0$ pour chaque point de densité de l'ensemble $\sigma(r)$ (donc presque partout dans cet ensemble!) grâce à l'évaluation $(\omega'')$.

(3) $|s(x, y) \leqq 8\,A$ pour tous les autres points qui ne faissent d'ailleurs qu'un ensemble de mesure nulle.

Divisons avec M. Looman le carré $r$ en $4, 16, \ldots, 4^n \ldots$ carrées partie égaux et posons:

$$s_n(x, y) = \frac{I(\varrho)}{m(\varrho)}$$

lorsque $(x, y)$ est situé dans le carré $\varrho$ de la $n$ ième division.

On voit que:

(1) $$s_n(x, y) \to s(x, y) = 0$$

presque partout dans $r$,

(2) les fonctions

$$s, s_1, s_2, \ldots, s_n \ldots$$

sont bornées dans leurs ensemble

(3) $$I(r) = \int\int_r s_n(x, y)dxdy$$

donc

$$I(r) = \lim \int\int_r s_n(x, y)dxdy = \int\int_r s(x, y)dxdy = 0. \qquad (\omega''')$$

L'égalité $(\omega''')$ étant vraie aussi pour chaque carré contenu dans le carré $r$ nous montre enfin que l'existence de l'ensemble $M$ conduit à une contradiction.

La démonstration du théorème de M. Montel et M Looman est achévé. Je repète ici pour la commodité du lecteur la démonstation du lemme M. Looman mentioné dans le texte.

**Hypothèse:** $r$ est un rectangle contenu dans le rectangle $R$ et $\sigma(r) \neq 0$.

**Thèse.** Il existe un carré $\varrho$ contenu dans $r$ tel que $\sigma(\varrho) \neq 0$ et que

$$\lambda(\varrho) = \text{borne sup} \left| \frac{p(x, y + \lambda) - p(x, y)}{\lambda} \right|$$

$[(x, y)$ point de l'ensemble $\sigma(\varrho), (x, y + \lambda)$ point du carré $\varrho]$

soit finie.

**Démonstration.** Supposons le contraire. Il existe alors un point

$(x_1, y_1)$ de l'ensemble $\sigma(r)$ et un autre

$(x_1, y_1 + \lambda_1)$ du rectangle $r$ tels que:

$$\left| \frac{p(x_1, y_1 + \lambda_1) - p(x_1, y_1)}{\lambda_1} \right| > 1.$$

Autour du point $(x_1, y_1)$ traçons un petit carré $r_1$ contenu dans $r$ et tel que l'on ait

$$\left| \frac{p(x, y + \lambda_1) - p(x, y)}{\lambda_1} \right| > 1$$

le point $(x, y)$ étant un point arbitraire du carré $r$, ce qui est évidemment possible grâce à la continuité de la fonction $p(x, y)$.

Remarquons que $\sigma(r_1)$ n'est pas vide. La borne supérieure $\lambda(r_1)$ n'étant pas finie il existe:

$(x_2 y_2)$ point de $\sigma(r_1)$

et $(x_2, y_2 + \lambda_2)$ point de $r_1$

tels que

$$\left| \frac{p(x_2, y_2 + \lambda_2) - p(x_2, y_2)}{\lambda_2} \right| > 2.$$

Autour du point $(x_2 y_2)$ traçons encore un petit carré $r_2$ contenu dans $r_1$ et tel que l'on ait:

$$\left| \frac{p(x, y + \lambda_2) - p(x, y)}{\lambda_2} \right| > 2$$

pour tous les points $(x, y)$ du carré $r_2$. On a encore $\sigma(r_2) \neq 0$.

Nous obtenons ainsi les suites:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & r_1 & r_2 & r_3 \ \ldots \\
(2) & (x_1 y_1) & (x_2 y_2) & (x_3 y_3) \ \ldots \\
(3) & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \ \ldots,
\end{array}
$$

et l'on aura

$$
(4) \qquad \left| \frac{p(x_n, y_n + \lambda_n) - p(x_n y_n)}{\lambda_n} \right| > n.
$$

On peut s'arranger de manière que l'on ait:

$$
\lim_{n/\infty} \lambda_n = 0
$$

et que les dimensions de carrés $r_1, r_2, r_3, \ldots$ tendent vers zéro.

Le point $(x_n y_n)$ converge alors vers un point $(\xi, \eta)$ et l'on aura:

$$
\left| \frac{p(\xi, \eta + \lambda_n) - p(\xi, \eta)}{\lambda_n} \right| > n \qquad n = 1, 2, \ldots
$$

donc da dérivée $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ ne pourrait être finie au point $(\xi, \eta)$.

C. Q. F. D.

---

# Die Darboux'sche Eigenschaft der Jacobischen Derivierten.

Von

W. Wilkosz (Krakau).

## § 1.

Betrachten wir eine Abbildung des Gebietes $D$ in $n$-dimensionalem euklidischem Raume, gegeben durch das System der Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1 \ldots x_n) \\ \vdots \;\; & \;\; \vdots \;\; \vdots \quad \vdots \\ y_n &= f_n(x_1 \ldots x_n). \end{aligned}$$

Gesetzt den Fall, dass $P(x_1 \ldots x_n)$ irgend ein Punkt des Gebietes $D$, $\sigma$ eine beliebige $n$-dimensionale offene Kugel, die ganz im Gebiete enthalten bleibt, $\sigma'$ deren Bild ist, verwirklicht durch die Abbildung (1), und $|A|$ immer das äussere (Lebesguesche) Mass der Menge $A$ bezeichnet.

Ferner betrachten wir den Grenzwert:

$$(2)\qquad \lim_{\varrho/0} \frac{|\sigma'|}{|\sigma|} = I(P) \qquad \{\varrho \text{ Radius von } \sigma\}$$

und nehmen folgende 2 Fälle:

1. entweder ist $P$ der Mittelpunkt aller $\sigma$, die bei der Bildung von (2) verwendet werden, oder

2. liegt der gegebene Punkt $P$ schlechthin im Innern der Kugel $\sigma$; dann werden wir den Grenzwert $J(P)$, vorausgesetzt, dass er existiert, künftighin als Jacobische *sphärische zentrierte* beziehungsweise *nicht-zentrierte* Derivierte bezeichnen.

Solche oder ähnliche Derivierten werden oft betrachtet. Die wichtige Arbeit von St. Banach, die in den Fundamenta Mathematicae Bd. VI (1924) erschienen ist, beschäftigt sich mit den Derivierten, die aber mit Hilfe von $n$-dimensionalen achsenparallelen Würfeln gebildet sind; trotzdem lassen sich sämtliche Betrachtungen der letztgenannten Arbeit auf unsere sphärischen Derivierten zurückführen. Wir brauchen aber nur wenig davon für unsere Zwecke.

Stellen wir eine Frage folgendermassen:

Vorausgesetzt, dass:

1. Die Funktionen $f_1 \ldots f_n$ stetig im Gebiete $D$ sind,

2. die sphärische Derivierte in jedem Punkte des Gebietes vorhanden ist und einen endlichen Wert besitzt, $P$ und $Q$ zwei Punkte von $G$ sind,

$$J(P) = A, \quad J(Q) = B, \quad A \neq B$$

und $C$ eine Zahl, die zwischen $A$ und $B$ liegt. Gibt es im Gebiete $D$ mindestens einen Punkt X, sodass

$$J(X) = C$$

wäre?

Kurz, wir suchen also nach der Eigenschaft, die im Gebiete der Funktionen von einer Veränderlichen als „Darboux'sche" bezeichnet wird, und für die wir auch in unserem Falle diesen Namen behalten wollen.

Es ist nun interessant, dass die Frage trivial wird, wenn wir in unserer Fragestellung durch die sphärische Derivierte die *zentrierte* verstehen. Betrachten wir die Abbildung der ganzen Ebene, die stetig und dazu *ein-eindeutig* ist gebeben durch:

$$X = x, \quad Y = \begin{cases} 4y \\ 0 \\ 2y \end{cases} \text{für} \begin{cases} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

Die Abbildung besitzt in jedem Punkte der Ebene die zentrierte Derivierte und ihr Wert ist gleich:

$$4, \quad 3 \quad \text{oder} \quad 2$$

je nachdem $y \gtreqless 0$ ist.

Wir sehen also, dass für die zentrierte Derivierte die Darboux'sche Eigenschaft selbst im Falle einer umkehrbar eindeutigen stetigen Abbildung keineswegs zutrifft.

Anders verhält sich die Sache im Falle der *nicht-zentrierten* sphärischen Derivierten.

Zweck der jetzigen Arbeit ist nämlich der Beweis des Satzes, dass die *nicht-zentrierte* Derivierte, deren Existenz in jedem Punkte der *stetigen*, *ein-eindeutigen* Abbildung (1) vorausgesetzt wird, die erwünschte Darboux'sche Eigenschaft wirklich besitzt. Ob der Satz auch für die nicht notwendig ein-eindeutigen Abbildungen gilt, konnte ich bis jetzt nicht ganz allgemein beweisen, ich werde vielleicht in einer weiteren Note die Sache näher zu erforschen suchen.

§ 2.

Kehren wir nun zu unserer Abbildung (1) zurück. Wir setzen noch hinzu, dass sie eine *umkehrbar eindeutige* stetige Transformation des Gebietes $D$ in $n$-dimensionalem Raume vorstellen soll.

Es sei $H$ der Körper aller messbaren Untermengen $M$ von $D$, die im Gebiete samt ihrer Grenze enthalten sind, und es bezeichne $F(M)$ das äussere Mass von $M'$

$$F(M) = |M'|.$$

Nebenbei sei bemerkt, dass, wenn $M$ im Borelschen Sinne messbar ist, so ist es auch das Bild von $M$. Es ist nämlich $M'$, als stetige Transformation einer $(B)$-messbaren Menge, eine Souslinsche $(A)$-Menge, die immer im Lebesgueschen Sinne messbar sein muss. Insbesondere ist es der Fall bei der Abbildung der Kugel, die zur Bildung der Derivierten verwendet wird.

Die Funktion $F(M)$ stellt nun eine Mengenfunktion vor, die für alle Mengen des Körpers $H$ definiert, und nachdem die Abbildung als umkehrbar eindeutig vorausgesetzt wurde, sogleich additiv ist, d. h. es ist

$$F\left(\sum_i M_i\right) = \sum_i F(M_i)$$

wenn nur alle $M_i$ und zugleich die Summe $\sum_i M_i$ zu $H$ gehören und die Mengen $M_i$ ohne gemeinsame Punkte sind.

Das nächste Ziel wird es nun sein, die *Totalstetigkeit* der Mengenfunktion $F(M)$ zu zeigen, unter der Voraussetzung, dass für die betrachtete Abbildung die sphärische Derivierte in jedem Punkte des Gebietes $D$ vorhanden ist. Wir verstehen darunter im Einverständnis mit de la Vallée Poussin Folgendes:

Es sei $K$ irgend eine geschlossene beschränkte Untermenge von $D$ un $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl: Es sol eine positive Zahl $\delta$ existieren, so dass für jede messbare Untermenge $M$ von $K$ die Ungleichheit:

$$F(M) < \varepsilon \quad \text{eine Folge von} \quad |M| < \delta$$

ist. In diesem Falle nennen wir $F(M)$ totalstetig in der Menge $K$.

Gilt diese Eigenschaft für jede geschlossene beschränkte Untermenge $K$ von $D$, so sagen wir kurz, es ist $F(M)$ totalstetig in D.

Um die Totalstetigkeit der Funktion $F(M)$ zu zeigen, genügt es nach den Sätzen, von Herrn Banach in seiner Arbeit „Sur les lignes rectifiables..." [1]) zu beweisen, dass für jede Nullmenge $F$, die in $D$ enthalten ist, die Gleichung

$$F(E) = 0$$

besteht.

Zum Beweis ziehen wir einen sehr wichtigen Überdeckungssatz von Rademacher zu, der in seiner Inauguraldissertation (Monatshefte für Math. u. Phys. 1916) enthalten ist. Der Satz lautet so: „Es sei $E$ eine Nullmege. Jedem Punkte $P$ von $E$ schreiben wir eine Folge von Kugeln $\sigma_i$, deren Radien nach Null streben, und welche immer den Punkt $P$ in seinem Mittepunkt haben, zu. Es sei $(N)$ die Menge aller derer Kugeln, und $\varepsilon$ eine positive Zahl. Es ist immer möglich, aus der Menge $(N)$ eine Folge von Kugeln

$$\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots$$

so auszuwählen, dass

$$\sum_k |\sigma^{(k)}| < \varepsilon$$

und die Kugeln der Folge *alle* Punkte von $E$ lückenlos überdecken".

Es sei jetzt $E$ eine Nullmenge, die ganz in $D$ enthalten ist. Die Funktion $F(M)$ oder die Transformation (1) besitzt in jedem Punkte $P$ von $E$ eine endliche nicht-zentrierte Derivierte $J(P)$. Wir bezeichnen mit $E_n$ diejenige Menge die aus lauter Punkten besteht, für welche $J(P) \leqq n$ ist, wenn $n$ eine gegebene ganze Zahl bedeutet. Es ist klar, dass es genügt die Gleichheit: $|E'_n| = 0$ für jedes $n$ zu zeigen.

Um dies zu beweisen, denken wir uns um jeden Punkt $P$ von $E_n$ eine unendliche Folge von Kugeln $\sigma_i(P)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

---

[1]) Fundamenta Math. t. VII.

1. $P$ liegt im Mittelpunkt von $\sigma_i(P)$ $i|1, 2\ldots$
2. Die Radien der Folge $\{\sigma_i(P)\}$ streben für festes $P$, gegen Null.
3. $|\sigma_i'(P)| < 2n|\sigma_i(P)|$ ($P$ in $E_n$, $i|2, 2\ldots$).

Es sei nun $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl.

Wir wählen aus der Gesamtheit von Kugeln $\sigma_i(P)$ eine endliche oder unendliche Folge

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$$

so, dass die Kugeln der Folge die ganze Menge $E_n$ lückenlos überdecken und ausserdem die Ungleichung:

$$\sum |\sigma_i| < \varepsilon$$

besteht. Die Möglichkeit einer solchen Auswahl ist uns durch den soeben erwähnten Satz von Rademacher gesichert.

Dann wird auch

$$\sum |\sigma_i'| < 2n\varepsilon$$

und folglich, da die Summe $\Sigma\sigma_i$ die ganze Menge $E_n$ überdeckt, zugleich

$$|E_n'| < 2n\varepsilon.$$

Daraus folgt schon $|E_n'| = 0$ und endlich noch $|E'| = 0$.

Die Abbildung (1) ist also unter den oben genannten Voraussetzungen *totalstetig* in $D$.

Wir ziehen daraus 3 wichtige Schlüsse.

I. Die Abbildung ist *messbar* d. h., es entspricht jeder messbaren Menge vermittels der Transformation wiederum eine messbare Menge.

[Siehe Radermachers Dissertation].

II. Wenn $M$ eine messbare beschränkte Untermenge von D ist, dann gilt die Formel:

$$F(M) = |M'| = \int_M J(P)\,dP. \tag{3}$$

Der Schluss folgt nämlich aus der Additivität und Totalstetigkeit der Mengenfunktion $F(M)$ nach dem Satze von de la Vallée Poussin (Cours d'Analyse t. II. ed. 2. p. 116 nr. 104).

III, Bewegt sich eine Kugel $\sigma$ stetig im Gebiete $D$, so ändert sich das Mass ihres Bildes d. h. der Wert von $F(\sigma)$ stetig.

Es ist dies eine unmittelbare Folge der Integraldarstellung von $F$ durch die Formel (3).

§ 3.

Endlich sind wir gewappnet genug, um den Beweis des Hauptsatzes unserer Arbeit geben zu können.

Satz: Wir setzen voraus, dass die Abbildung (1) stetig und umkehrbar eindeutig ist, in jedem Punkte von $D$ eine endliche *nicht-zentrierte* sphärische Derivierte besitzt, $P$ und $Q$ zwei Punkte des Gebietes $D$ sind und ausserdem

$$J(P)=A,\quad J(Q)=B,\quad A<C<B$$
$$\text{oder}\quad A>C>A,$$

dann gibt es in $D$ mindestens einen Punkt $(X)$ von der Eigenschaft, dass

$$J(X)=C.$$

Beweis:

Wir verbinden die Punkte $P$ und $Q$ im Innern des Gebietes $D$ durch eine stetige Kurve ($\mathfrak{C}$). Um die Punkte $P$ und $Q$ beschreiben wir zwei offene Kugeln $\sigma_0$ und $\tau_0$, so dass:

1. Der Mittelpunkt von $\sigma_0$ in $P$ und der Mittelpunkt von $\tau_0$ in $Q$ liegt.

2. Die Kugeln $\sigma_0, \tau_0$ sind kongruent und liegen beide in $D$.

3. Es besteht die Ungleichung

$$\frac{|\sigma_0'|}{|\sigma_0|}<C<\frac{|\tau_0'|}{|\tau_0|}.$$

4. Während der Bewegung der Kugel längst der Kurve $\mathfrak{C}_1$ sodass der Mittelpunkt immer auf $\mathfrak{C}$ sich befindet, und dass endlich $\sigma_0$ in die Lage von $\tau_0$ gebracht wird, verlässt die Kugel samt ihrer Grenze niemals das Gebiet $D$.

Nach den Bemerkungen, die wir oben gemacht haben, ändert sich der Wert von $F(\sigma)$ stetig und erreicht in einer bestimmten Lage, z. B. $\omega_0$ den Zwischenwert $C$. Wir haben dabei gemäss der Formel (3):

$$|\omega'|=\int_{\omega} J(P)\,dP=C\cdot|\omega_0|=C\cdot|\sigma_0|=C\cdot\ \tau_0.$$

Nehmen wir an, da᷊ Innern von $\omega_0$ die Derivierte $J(P)$

immer von $C$ verschieden ist. Es ist aber unmöglich, dass immer im Innern von $\omega_0$ $J(P) < C$ wäre, denn in unserem Falle:

$$\int_{\omega} [C - J(P)]\, dP = 0,$$

also müsste $C - J(P)$ in dem der Kugel massgleichen Kern verschwinden. Die andere Annahme, dass immer im Innern von $\omega_0$ $J(P) > C$ ist, erweist sich auf ähnliche Weise als falsch. Es gibt also im Innern von $\omega_0$ mindestens zwei Punkte $P_1$ und $Q_1$, so dass:

$$J(P_1) < C < J(Q_1)$$

ist.

Jetzt wiederholen wir das vorige Verfahren, indem wir nur die Punkte $P$ und $Q$ durch $P_1$ und $Q_1$, und ausserdem das Gebiet $D$ durch das Innere von $\omega_0$ ersetzen.

Wir erhalten endlich, wenn wir die Kugeln immer kleiner wählen, eine Folge:

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots$$

die folgende Eigenschaften aufweist:

1. Die Kugel $\omega_{i+1}$ ist samt ihrer Grenze in $\omega_i$ enthalten.
2. Die Radien der Kugeln bilden eine Nullfolge.
3. Es ist immer:

$$\frac{|\omega_i'|}{|\omega_i|} = C. \tag{4}$$

4. Die Mittelpunkte von $\omega_i$ konvergieren gegen einen bestimmten Punkt $X$, der im Innern jeder $\omega_i$ liegt.

Im Punkte $X$ gibt es aber eine bestimmte endliche *nichtzentrierte* Derivierte $J(X)$, deren Wert aber wegen (4):

$$J(X) = \lim \frac{|\omega_i'|}{|\omega_i'|} = C$$

sein muss. Die Annahme führt also zum Widerspruch und somit ist unser Satz bewiesen.

Anmerkung.

Das Ergebnis dieser Arbeit wurde schon im Jahre 1925 in einer Sitzung der Polnischen Mathematiker-Vereinigung vorgeführt.

# Surfaces réglées algébriques. Singularités.

Par

M. Bertrand Gambier

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Cayley a étudié et classé les surfaces algébriques de degré 4: Papers, 5, (1864), p. 214—219 et 6, (1868) p. 312—328; il a laissé échapper deux types se correspondant dualistiquement. Cremona a donné la première classification complète de ces surfaces (Memorie dell' Accademia di Bologna (2), 8, (1868) p. 235; Opere, 2, 420). Schwarz a donné une classification complète des surfaces algébriques de degré 5, au moyen de la ligne multiple de ces surfaces; n'employer que la ligne multiple, sans se servir de la notion corrélative: développable pluri-tangente, a l'inconvénient de rassembler en un seul plusieurs types qui se différencient par l'emploi des coordonnées tangentielles. J'ai moi-même, sans connaître les classifications qui précèdent, étudié aux Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, t. VII, 1928, p. 148—212 les surfaces algébriques réglées, donnant la classification des surfaces de degré 4, (fondée sur l'étude de la ligne multiple, de la développable pluri-tangente et le genre), puis donné un aperçu sur la classification des surfaces de degré 5; j'ai terminé mon travail en montrant comment les triangles et polygônes de Poncelet, relatifs à des courbes algébriques de degré ou classe quelconques, s'introduisent automatiquement dès que l'on cherche une surface réglée admettant des plans tangents multiples d'ordre égal à 3 ou supérieur à 3.

Depuis cette époque, j'ai eu l'occasion d'analyser un traité rédigé en Angleterre: *The Theory of Ruled Surfaces*, par W. L. Edge, Fellow of Trinity College, Cambridge (in 8$^0$, 324 pages, Cambridge,

University Press, 1931). L'auteur a rédigé son travail, consacré surtout aux surfaces algébriques de degré 4, 5, 6 sans connaître mes résultats. J'ai ainsi eu l'occasion de constater que j'avais commis une omission, portant sur trois types, dans la classification des surfaces de degré quatre: deux de ces types s'échangent l'un en l'autre par dualité et le troisième, par dualité, se transforme en un type de même espèce. Je montrerai, un peu plus loin, les causes de cet oubli, de façon à bien mettre en évidence le rôle des *droites exceptionnelles* situées sur les surfaces réglées (pouvant être au nombre de 0, 1 ou 2): ces droites ne sont pas *génératrices*: elles servent de *directrices*; mais *accidentellement, s'il n'y a qu' une droite exceptionnelle, cette droite peut intervenir à la fois comme directrice et comme génératrice.*

Je me suis, par contre, aperçu que M. Edge n'a pas assez détaillé certaines configurations de lignes multiples. Ainsi M. Edge signale qu'une surface réglée de degré 5 peut avoir une ligne multiple formée de trois coniques doubles: *en général ces coniques sont distinctes*, mais deux d'entre elles peuvent venir se confondre, et alors la surface possède *une conique double ordinaire et une conique double de raccord*: j'avais indiqué cette configuration à la page 190 de mon travail; j'indiquerai ici le cas plus curieux encore *où les 3 coniques se réunissent en une seule*, deux nappes de la surface se trouvant osculatrices le long de cette conique

Je donnerai aussi quelques aperçus sur les courbes singulières et la nature des points multiples sur une section plane *quelconque* d'une surface réglée.

2. *Surface réglée de degré 4 ayant une droite triple.* A la page 162 de mon précédent travail j'ai écrit ceci:

„Quand chaque génératrice d'une surface réglée $S$ de degré 4 passe par un point triple, le lieu du point triple ne peut être qu'une droite $\Delta$; en la prenant pour $x = 0$, $y = 0$, l'équation de $S$ devient

$$x^3 P + 3x^2 y Q + 3xy^2 R + y^3 S = 0$$

où $P, Q, R, S$ sont des formes linéaires eu $x, y, z, t$; en coupant par $y = mx$, on a bien une droite variable sur $S$; si les 4 plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ n'ont pas de droite commune, on a le cas $F$ réciproque du cas $D$ (le cas $D$ est caractérisé par ce fait que les génératrices sont sécantes doubles d'une cubique gauche $\Gamma$ et s'appuient sur une droite $\Delta$; la cubique gauche est lieu de points dou-

bles; la droite $\Delta$ est simple ponctuellement, mais triple tangentiellement, à titre d'enveloppe de plans tritangents). Si les 4 plans ont une droite commune, l'équation de $S$ peut recevoir la forme

$$x^3(\lambda z + \mu t) + 3x^2 y(\lambda' z + \mu' t) + 3xy^2(\lambda'' z + \mu'' t) + \\ + y^3(\lambda''' z + \mu''' t) = 0.$$

On a le cas $G$ qui est à lui-même son réciproque par dualité".

Il y a là une omission portant sur ce que j'ai appelé le cas $F$, cas où la droite $\Delta$ est droite triple et où il n'y a pas de droite exceptionnelle autre que $\Delta$: *en général, la droite $\Delta$ n'est pas en même temps génératrice,* et le type obtenu ainsi donne bien par dualité le type qui dans ma classification s'appelle type $D$. *Mais la droite triple $\Delta$ peut être une fois génératrice, ou même deux fois génératrice:* j'entends par là que, si l'on suit par continuité le déplacement de la génératrice variable $G$, cette génératrice vient coïncider soit *une*, soit *deux* fois avec $\Delta$.

*Une telle circonstance peut arriver pour toute surface réglée (algébrique ou non) qui possède une droite exceptionnelle et une seule, d'ordre de multiplicité $n > 1$; la droite en jeu peut être* 0, 1, 2, ... $\overline{n-1}$ *fois génératrice.* Supposons que la surface réglée $S$ soit de degré $n+p$; un plan *quelconque* passant par $D$ coupe $S$ suivant $p$ génératrices; soit $G$ l'une d'elles; si $G$ peut venir, par continuité, s'appliquer sur $D$, le plan $(D, G)$, à la limite, sera tangent, tout le long de $D$, à une nappe convenablement choisie de $S$, de sorte que, si $D$ est $h$ fois génératrice, d'un point de $D$ ne partent que $n-h$ génératrices autres que $D$.

*Appliquons ceci au cas de $S$, surface réglée de degré 4, avec $D$ droite triple.*

*Supposons que $D$ ne soit pas génératrice*; dans ce cas de chaque point $D$ partent trois génératrices; le plan de deux d'entre elles est bitangent à $S$, de sorte que les plans bitangents de cette espèce enveloppent une développable de classe 3 (deux des trois génératrices ne peuvent être dans un même plan avec $D$, sinon ce plan couperait $S$ suivant $D$ comptant pour 3, et chaque génératrice comptant pour 1 chacune: le total 5 dépasserait l'ordre de $S$). Donc, par dualité, on arrive bien à une surface ayant une cubique gauche pour ligne double, les génératrices s'appuyant sur une droite.

*Supposons que $D$ soit une fois génératrice*: prenons un point $A$ arbitraire sur $D$ et menons les deux génératrices (autres que $D$)

qui en partent, $AG_1$ et $AG_2$; quand $A$ se déplace par continuité sur $D$ et vient en $B$, la génératrice $AG_1$, par exemple, suivie par continuité, vient se confondre avec $D$, le plan $DG_1$ tendant alors vers un certain plan $\Pi$ contenant $D$; le plan $AG_1G_2$ enveloppe une développable $C$ de seconde classe, car de $A$ on peut mener à cette développable les deux plans tangents $AG_1G_2$ et $\Pi$; au point $B$, le plan tangent à $S$ peut être considéré connue indéterminé autour de $D$, car *si, sur une surface réglée il y a une génératrice avec plan tangent stationnaire le long de cette génératrice, il y a, dualistiquement, sur cette même génératrice un point où le plan tangent est indéterminé*; de la sorte le plan $DG_1$ par exemple peut être considéré comme plan bitangent, l'un des points de contact étant $B$, l'autre étant en $A$ sur $G_1$: *la droite $D$ est donc enveloppe de plans bitangents et lieu de points triples*; par dualité, nous aurons donc une surface $S'$, transformée de $S$, admettant *une droite $D'$ lieu de points doubles et enveloppe de plans tritangents et une conique $C'$ lieu de points doubles*; *sur $S$ la droite $D$ est tangente à $C$, donc sur $S'$ la droite $D'$ rencontre $C$; la droite $D'$ est de plus génératrice de $S'$.*

En faisant la classification des surfaces de degré 4, j'avais signalé (cas $E$) les surfaces admettant *une conique double et une droite exceptionnelle double ponctuellement*: j'avais laissé échapper le cas où cette droite est aussi génératrice: ce cas oublié est celui qui correspond, par dualité, à un cas oublié pour les droites triples ponctuellement.

Supposons maintenant que *la droite triple (ponctuellement) $D$ soit deux fois génératrice*: par un point $A$ *quelconque* de $D$ passe une seule génératrice $AG$, qui, lorsque $A$ tend vers un certain point $B$ ou $C$ de $D$, tend elle-même vers $D$; le plan $DG$ peut être considéré comme trois fois tangent: une fois au point $A$, une autre fois en $B$, une autre fois en $C$. Donc, par dualité, ce type se transforme en un type de même espèce.

Il n'y a plus qu'à indiquer comment on réalise les surfaces de ces divers types:

*Droite $D$ triple ponctuellement, simple tangentiellement, non génératrice.* Traçons dans deux plans différents deux coniques $C$ et $C_1$; prenons sur $C$ un point $A$ et sur $C_1$ un point $A_1$ tels que leurs tangentes ne concourent pas (autrement dit ne coupent pas au même point la droite intersection des plans de $C$ et $C_1$); une droite $G$ assujétie à rencontrer $C$, $C_1$ et la droite $AA_1$ engendre la surface demandée; $AA_1$ est la droite triple; $C$ et $C_1$ sont lignes simples.

*Droite D triple ponctuellement, double tangentiellement, une fois génératrice*: la génération est la même que précédemment, mais $A$ et $A_1$ sont choisis de sorte que les tangentes concourent (percent l'intersection des plans au même point); $AA_1$ est la droite exceptionnelle et le plan mené par $AA_1$ et les tangentes en $A$ et $A_1$ est le plan tangent à point de contact indéterminé sur $AA_1$.

*Droite D triple ponctuellement, triple tangentiellement, deux fois génératrice.* Il suffit de construire une cubique plane $F$ unicursale; traçons dans le plan de $\Gamma$ une droite arbitraire $\Delta$, coupant $\Gamma$ en $\alpha, \beta, \gamma$ et les tangentes au point double $A$ en $t$ et $t'$; par $\Delta$ faisons passer un autre plan où nous construisons une cubique $\Gamma_1$ unicursale, passant en $\alpha, \beta$ mais non en $\gamma$ et telles que les tangentes au point double $A_1$ passent en $t$ et $t'$; la surface $S$ est engendrée par les droites assujéties à rencontrer $\Gamma, \Gamma_1$ et $AA_1$; les deux plans tangents à point de contact indéterminé sur $AA_1$ sont déterminés par $AA_1$ et $At$ ou $AA_1$ et $At'$. Dans cet exemple $At$ et $At'$ peuvent être distinctes ou confondues.

Pour chacun des deux premiers exemples, on pourrait déterminer directement le type correspondant par dualité: le premier conduit à prendre une cubique gauche $\Gamma$, une droite $D$ arbitraire, à couper $\Gamma$ par un plan issu de $D$ et à tracer les cordes joignant deux à deux les points ainsi obtenus sur $\Gamma$. Pour le second: *conique double, droite exceptionnelle double ponctuellement, triple tangentiellement et une fois génératrice*, on trace une conique $C$, une droite $D$ rencontrant la conique en un point $A$: les deux courbes $D$ et $C$ sont unicursales; nous pouvons donc réaliser une correspondance (2, 1) entre les points de $D$ et ceux de $C$, avec les conditions suivantes: le point de $D$ qui coïncide avec $A$ a son correspondant sur $C$ confondu avec le point $A$; le point de $C$ qui est confondu avec $A$ a donc un de ses correspondants confondu avec $A$, nous supposerons que l'autre est un point $B$ distinct de $A$; la surface cherchée est le lieu des droites qui joignent les points homologues de $C$ et $D$; c'est précisément cet exemple que j'ai oublié dans mon précédent mémoire, p. 159, cas E: *droite double, conique double*; la droite double n'étant pas génératrice est double ponctuellement et tangentiellement; c'est le cas que j'avais indiqué, qui se correspond à lui même par dualité et que l'on réalise en établissant entre $D$ et $C$ une correspondance (2, 2) telle que le point $A$, considéré comme point de $D$ ou $C$, ait ses deux homologues sur l'autre

courbe confondus avec $A$. Les omissions de mon précédent travail se trouvent ainsi rectifiées et le lecteur voit les précautions à prendre quand une surface réglée possède, en dehors des génératrices, une droite exceptionnelle *unique*: il y a à examiner si cette droite est, ou non, en même temps génératrice.

3. *Considérations générales sur les lignes multiples d'une surface réglée.* La classification de M. Edge est basée sur les quatre caractères suivants: *degré* (égal, comme l'on sait, à la *classe*), *genre*, nature de la *courbe multiple*, nature de la *développable enveloppe des plans pluritangents.* Il est inutile de revenir sur les raisons qui obligent toute surface algébrique, de degré au moins égal à trois, à posséder une ligne multiple; le cas le plus normal, du moins si l'étude est faite du point de vue *ponctuel*, est celui où la ligne multiple est lieu de points doubles (dont partent deux génératrices distinctes, le cas de deux génératrices confondues devant être regardé comme celui des développables et de leur arête de rebroussement). A ce point de vue, il y a une certaine analogie entre les surfaces réglées algébriques et les courbes planes algébriques: le théorème de Noether Halphen pouve que toute courbe plane algébrique peut, *par une transformation birationnelle plane*, être remplacée par une autre dont les singularités se réduisent à des *points doubles à tangentes distinctes*; si donc, pour certaines études, telles que la recherche des intégrales abéliennes, on peut se borner à ces singularités élémentaires, il n'en résulte pas que l'on doive écarter de parti pris des singularités plus compliquées, telles que réunion en un même point de plusieurs cycles (au sens d'Halphen) de degré et classe arbitraires, ayant les uns avec les autres des contacts d'ordre arbitraire (ordre nul ou non).

Or étant donné une surface réglée $S$ algébrique ayant des lignes multiples de nature quelconque, on peut la remplacer par une autre surface réglée $S'$ algébrique, de sorte que les génératrices de $S$ et $S'$ se correspondent *birationnellement* (de surface à surface) et que $S'$ n'ait que des lignes doubles. Pour le voir, prenons sur $S$ une section plane $C$ *quelconque*, donc ligne simple de $S$: on peut, par une transformation birationnelle plane transformer $C$ en une courbe plane $C'$ n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes: appelons $M$, $M'$ les points homologues de $C$ et $C'$; on peut de même choisir sur $S$ une autre section plane *quelconque* $C_1$ et par une transformation birationnelle plane analogue à la première la

transformer en une nouvelle courbe plane $C_1'$ à points doubles ordinaires (d'ailleurs $C$ et $C_1$ se correspondent, par les pieds $M$ et $M_1$ des génératrices de $S$, birationnellement de courbe à courbe); cela posé plaçons les plans de $C'$ et $C_1'$ dans une position relative *arbitraire* et joignons les points $M'$, $M_1'$ homologues respectivement de $M$ et $M_1$, nous obtenons ainsi une surface $S'$ réglée, correspondant birationnellement (de surface à surface) à $S$, génératrice par génératrice; soit $\Delta'$ la droite commune aux plans de $C'$ et $C_1'$ et $\mu'$ un point commun à $\Delta'$ et $C'$; le point $\mu'$ a pour homologue $\mu_1'$ sur $C_1'$ et la droite $\mu' \mu_1'$ est génératrice de $S'$ contenue dans le plan de $C_1'$; cette droite $\mu' \mu_1'$ coupe $C_1'$ en des points qui sont doubles sur $S'$; si $\nu'$ est un autre point commun à $\Delta'$ et $C'$, nous obtenons de même un point $\nu_1'$, une génératrice $\nu' \nu_1'$ et il n'y aucune raison pour que $\mu' \mu_1'$ et $\nu' \nu_1'$ se coupent sur $C_1'$: leur point d'intersection est un point double de $S'$; les seuls points multiples de $S'$ contenus dans le plan de $C_1'$ sont: les points doubles de $C_1'$, les points autres que $\mu_1'$ où $\mu' \mu_1'$ coupe $C_1'$..., les points $(\mu' \mu_1', \nu' \nu_1')$...: tous ces points sont *doubles* sur $S'$, donc $S'$ n'a que des lignes multiples *doubles*. Pour obtenir ensuite une correspondance birationnelle de surface à surface entre les points de $S$ et $S'$, on établit sur chaque génératrice $MM_1$ et la génératrice homologue $M' M_1'$ une correspondance birationnelle, donc *homographique* entre les points de l'une et ceux de l'autre, $M$ et $M'$ étant un couple homologue et aussi $M_1$ et $M_1'$; cette homographie peut varier suivant une loi arbitraire avec la génératrice $MM_1$; on peut, par exemple, prendre le faisceau des plans passant par $\Delta$, droite commune aux plans de $C$ et $C_1$ et le remplacer homographiquement par le faisceau analogue issu de $\Delta'$, de sorte que $\infty^1$ sections planes de $S$ restent, sur $S'$, planes; dans les correspondances birationelles obtenues, on trouve comme éléments singuliers de la correspondance, entre autres, les génératrices de $S$ issues d'un point commun à $C$ et $C_1$ ou, s'il y en a, situées dans le plan de $C$ ou $C_1$ et les éléments analogues de $S'$.

Si l'on fait la classification des surfaces $S$ d'un degré donné, on ne peut se restreindre à ce genre de singularités élémentaires, de sorte que dans les tableaux que M. Edge a dressés pour les degrés 3, 4, 5, 6, il est obligé d'user de l'artifice suivant: une surface $S$ de degré 4 par exemple peut posséder une droite $\Delta$, *directrice et non génératrice*, telle que de chaque point $M$ de $\Delta$ partent deux génératrices $MG_1$ $MG_2$ coplanaires avec $\Delta$; $\Delta$ est alors ligne de rac-

cord de $S$ avec elle-même et toute section plane de $S$ possède au point $M$ situé sur $\Delta$, un point double, unique, comptant pour deux points doubles réunis; M. Edge indique donc, non pas $\Delta$, mais $2\Delta$; de même une surface de degré 5 peut avoir une droite $\Delta$ analogue, avec cette aggravation que $\Delta$ est de plus une fois génératrice (en même temps que *directrice double*) de sorte que, finalement, $\Delta$ est *ligne triple*; *chaque section plane présente au point $M$ situé sur $\Delta$ un point triple tel que deux branches soient tangentes*: ce point triple compte pour 4 points doubles et M. Edge emploie la notation $4\Delta$. Cette notation a le défaut qu' un même nombre entier, sauf 2, peut être obtenu de plusieurs façons: ainsi 4 peut correspondre à une ligne triple, mais aussi à une ligne double.

4. *Lignes de raccord, lignes d'osculation.* Une surface réglée de degré 4 ne peut avoir comme ligne de raccord qu' une *directrice* rectiligne double; une surface de degré 5 peut présenter soit la disposition qui vient d'être signalée, soit une ligne multiple composée de deux coniques doubles bisécantes, l'une d'elles étant *ligne de raccord simple*; elle peut avoir aussi une seule conique double, *ligne de raccord double*; dans les tableaux de M. Edge, on trouve signalé le cas de la surface de degré 5 dont la ligne multiple, composée de 3 coniques doubles, est représentée par la notation $B_2^0+C_2^0+D_2^0$, l'indice inférieur donnant le degré de la ligne et l'indice supérieur, le genre; il y a, dans les tableaux de M. Edge, deux générescences qui n'ont donc pas été signalées, à savoir $2B_2^0+C_2^0$ et $3B_0^2$; le cas d'une conique triple est, sur une surface de degré 5,impossible.

J'ai, dans mon mémoire précédent, donné un exemple de la conique de raccord: c'est la surface lieu de la droite mobile d'équations

$$(1)\qquad y-2tx+t^2+2tz=0 \qquad z=m(x-t) \qquad m^2+m-t=0$$

où $m$ est un paramètre variable avec la génératrice; la conique de raccord est la parabole lieu du point $M(t, t^2, 0)$; les deux génératrices $MG_1, MG_1$ issues de $M$ sont dans un même plan

$$y-2tx+t^2+2tz=0$$

contenant la tangente en $M$ à la parabole $(t, t^2, 0)$ et correspondent aux deux racines $m_1, m_2$ de l'équation $m^2+m-t=0$; la section de $S$ par le plan $z=0$ se compose de la parabole de raccord $P(y-x^2=0,\ z=0)$ et de la génératrice simple obtenue pour $m=0$, qui est $0x$; la surface est donc bien de degré 5. Pour avoir

l'équation cartésienne de la surface, on a à éliminer $m$ et $t$ entre les trois équations (1); on peut, par exemple, éliminer d'abord $m$ en écrivant

$$m = \frac{z}{x-t} \qquad \frac{z^2}{(x-t)^2} + \frac{z}{x-t} - t = 0.$$

Rendons la dernière équation entière et remplaçons $(x-t)^2$ par $x^2 - y - 2tz$ valeur déduite de la première équation (1); on a donc deux équations de degré 2 en $t$

$$(2) \qquad \begin{cases} t^2 + 2t(z-x) + y = 0 \\ 2zt^2 + t[y - x^2 - z] + z(z+x) = 0 \end{cases}$$

et l'équation de la surface $S$

$$(3) \qquad [z(z+x) - 2yz]^2 - [y - x^2 - z - 4z(z-x)][2z(z^2 - x^2) - \\ - y(y - x^2 - z)] = 0$$

qui est bien de degré 5 en $x, y, z$.

On peut remarquer, et ceci sera utile pour la suite, que les deux droites d'équations

$$(4) \qquad y - 2tx + t^2 + 2tz = 0 \qquad z = m(x-t)$$

et

$$(5) \qquad y - 2t_1 x + t_1^2 + 2t_1 z = 0 \qquad z = m_1(x - t_1)$$

où $t, m$ sont deux constantes (*indépendantes ou non*) et de même $t_1$ et $m_1$, se coupent si l'on a [1])

$$(6) \qquad (t - t_1)^2 (m + m_1 - 2mm_1) = 0.$$

*Il est remarquable que le second facteur ne dépende ni de $t$ ni de $t_1$.*

Dans le cas de la surface qui vient d'être déterminée, le point de rencontre des deux droites $m, m_1$ (avec $t = m^2 + m$, $t_1 = m_1^2 + m_1$) est obtenu aisément en introduisant les fonctions symétriques $m + m_1 = s$, $mm_1 = p$ avec la relation $s = 2p$; on trouve le point

---

[1]) Le moyen **régulier**, sinon le plus rapide, pour obtenir cette relation est de déterminer la première droite par le point $(t, t^2, 0)$ et ses paramètres directeurs $1, 2t(1-m), m$; on en déduit les coordonnées plückériennes de la première droite

$$1, 2t(1-m), m, mt^2, -mt, t^2(1-2m)$$

et de même pour la seconde. On obtient ainsi la condition de rencontre précise avec le *degré de multiplicité exact* pour chaque facteur.

(7) $$x = 4p^2 + p \quad y = 3p^2 + p \quad z = 2p^2 + p$$

qui décrit une parabole $P_1$ qui coupe $P$ aux deux points

(8) $$\begin{cases} x = y = z = 0 \quad t = 0 \quad p = 0 \\ x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{4}, \quad z = 0, \quad t = \frac{1}{2}, \quad p = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pour cette surface, la développable enveloppe des plans tangents doubles comprend le cylindre parabolique d'équation $y - (x - z)^2 = 0$, puis le cône enveloppe du plan

(9) $$4p^2x - y + (2 + 2p - 8p^2)z - p(3p + 1) = 0.$$

Ce cône a son sommet au point $(\frac{7}{4}, 1, \frac{1}{2})$; la surface réglée ainsi obtenue est, par dualité, transformée en une surface de même espèce.

Pour avoir la surface de degré 5 qui n'a plus qu'une conique double, le long de laquelle les deux nappes de la surface sont osculatrices, il suffit d'adjoindre aux deux équations (4) la relation

(10) $$(At + B)m^2 + (1 - 2m)(A_1t + B_1) = 0$$

où $A, B, A_1, B_1$ sont des constantes; en effet la relation (6) entraîne d'abord $t = t_1$, solution qui compte pour deux unités; le facteur $m + m_1 - 2mm_1 = 0$ entraîne

$$\frac{At + B}{A_1t + B_1} = \frac{2m - 1}{m^2} = \frac{2m_1 - 1}{m_1^2} = \frac{At_1 + B_1}{A_1t_1 + B_1}$$

donc $t = t_1$; donc les trois génératrices qui rencontrent la génératrice $(m, t)$ sont confondues toutes les trois avec la génératrice qui la rencontre sur la parabole $P$; la surface obtenue est bien de degré 5, car si une surface réglée est de degré $n$, chaque génératrice est rencontrée par $(n - 2)$ autres, *distinctes ou confondues.* Le calcul nécessaire pour obtenir l'équation de $S$ est fort simple: on a en effet, en vertu de (4),

$$m^2 = \frac{z^2}{(x - t)^2},$$

$$1 - 2m = \frac{x - t - 2z}{x - t} = \frac{(x - t)^2 - 2z(x - t)}{(x - t)^2} = \frac{x^2 - y - 2zx}{(x - t)^2}.$$

L'équation (10) donne donc pour $t$ une équation de degré 1,

$$(At + B)z^2 + (x^2 - y - 2zx)(A_1t + B_1) = 0.$$

En remplaçant $t$ par cette valeur dans la première équation (4), on a

$$(11)\begin{cases} [B_1(y-x^2+2zx)-Bz^2]^2+ \\ +2[B_1(y-x^2+2zx)-Bz^2][A_1(x^2-y+2zx)+Az^2](z-x)+ \\ +y[A_1(x^2-y+2zx)+Az^2]^2=0. \end{cases}$$

La ligne double se réduit à une seule conique double; chaque section plane est unicursale, car elle a deux points doubles dont chacun compte pour 3. La développable enveloppe des plans tangents doubles se réduit au cylindre parabolique $y-(x-z)^2=0$ (qui doit compter pour 3).

Le même procédé permet d'obtenir d'autres surfaces remarquables. Ecrivons un polynôme $F(t, \mu)$ de degré $\pi$ en $t$, $p$ en $\mu$; la droite d'équations

$$(12)\ y-2tx+t^2+2tz=0, \quad z=m(x-t), \quad F\left(t, \frac{m^2}{2m-1}\right)=0$$

engendre une surface réglée $S$, sur laquelle la parabole $(P)$, $z=0$, $y-x^2=0$, est ligne multiple d'ordre $2p$, car, par chaque point $(t, t^2, 0)$ de la parabole $P$, passent $2p$ génératrices obtenues en résolvant en $m$ l'équation $F=0$; sur chaque section plane de $S$, un point situé sur $P$ est multiple d'ordre $2p$; chaque branche qui y passe est osculatrice à une autre et simplement tangente aux $(2p-2)$ restantes; en effet les génératrices qui rencontrent la génératrice $(t, m)$ sont toutes celles qui satisfont à la relation (6), de sorte que la génératrice $\left(t, m_1=\frac{m}{2m-1}\right)$ compte pour trois exactement et les autres génératrices $\left(t, m_2 \neq m, m_2 \neq \frac{m}{2m-1}\right)$ en nombre $2p-2$ comptent pour deux exactement; les génératrices ainsi obtenues se coupent au point $(t, t^2, 0)$; nous avons d'autre part des génératrices qui ne se coupent plus sur $P$; car si $m$ est fixé, l'équation $F=0$ détermine $\pi$ valeurs de $t$, à savoir $t, t_1, \ldots, t_{\pi-1}$ et ces valeurs de $t$ sont les mêmes si $m$ est remplacé par $\frac{m}{2m-1}$, de sorte que les deux génératrices

$$(t. m), \quad \left(t_i, \frac{m}{2m-1}\right) \qquad i=1, 2, \ldots, \pi-1)$$

sont sécantes: il y a ainsi

$$3+2(2p-2)+\pi-1$$

génératrices coupant une génératrice donnée; la surface est donc de

degré $4p+\pi$; chaque point de $P$ est, pour une section plane de $S$, un point multiple d'ordre $2p$ équivalent à $(4p-1)p$ points doubles confondus; le genre de la surface est celui de la courbe $F\left(t, \frac{m^2}{2m-1}\right)=0$.

On vérifie sans peine ces résultats en adoptant par exemple la relation

(13) $$t^2=\frac{m^2}{2m-1}$$

qui est unicursale; pour éliminer $m$ et $t$, on remarque comme précédemment que l'on a

$$m^2=\frac{z^2}{(x-t)^2}=\frac{z^2}{x^2-y-2tz}$$

$$2m-1=\frac{2z}{x-t}-1=\frac{2z(x-t)}{x^2-y-2tz}-1=\frac{2xz-x^2+y}{x^2-y-2tz}$$

$$\frac{m^2}{2m-1}=\frac{z^2}{2zx-x^2+y}.$$

Il suffit donc d'éliminer $t$ entre les deux équations

$$t^2=\frac{z^2}{2zx-x^2+y}=2t(x-z)-y.$$

On trouve ainsi l'équation de la surface réglée $S$

(14) $$(z^2+y^2-x^2y+2xyz)^2=4(z-x)^2z^2(y-x^2+2zx).$$

Chaque section plane est de degré 6 et unicursale; elle a donc l'équivalent de 10 points doubles; on a d'abord deux points doubles sur $P$ comptant chacun pour 3; il y a ensuite 4 points doubles ordinaires en dehors de $P$. Un tel point double est obtenu en associant les génératrices

$$(m, t), \quad \left(m_1=\frac{m}{2m-1}, t_1=-t\right), \quad t^2=\frac{m^2}{2m-1}.$$

On peut poser

$$2m-1=\mu^2, \quad t=\frac{m}{\mu}, \quad m=\frac{\mu^2+1}{2}, \quad t^2=\frac{\mu^2+1}{2\mu}.$$

Il est clair que le système

$$\begin{cases} y-2tx+t^2+2tz=0 \\ y+2tx+t^2-2tz=0 \end{cases}$$

entraîne $y = -t^2 = -\dfrac{(\mu^2+1)^2}{4\mu^2}$, $x = z$.

On a ensuite

$$z = m(x-t) = m_1(x+t)$$

on trouve ainsi pour le point d'intersection

$$x = z = \frac{(\mu^2+1)^2}{2\mu(\mu^2-1)} \qquad y = \frac{-(\mu^2+1)^2}{4\mu^2}.$$

La représentation $\mu$ est impropre pour la ligne double; posons $M = \mu - \dfrac{1}{\mu}$; on a

$$(15)\quad x = z = \frac{\left(\mu+\dfrac{1}{\mu}\right)^2}{2\left(\mu-\dfrac{1}{\mu}\right)} = \frac{M^2+4}{2M}, \quad y = -\frac{1}{4}(M^2+4).$$

On trouve ainsi une cubique plane unicursale; la surface possède une génératrice double correspondant à $m = t = 0$; cette génératrice d'équations

$$z = 0, \qquad y = 0$$

est l'axe des $x$: elle est isolée. La cubique double a pour équations, d'après (14)

$$(16)\qquad x = z \qquad x^2 + y^2 + x^2 y = 0$$

L'origine est un point quadruple isolé pour la surface: elle appartient aux 3 lignes multiples. La génératrice double possède cette particularité que, pour chaque nappe la contenant, le plan tangent est le même tout le long de la génératrice: en effet, en transportant l'origine au point $(h, 0, 0)$, on trouve pour lieu des tangentes l'ensemble des deux plans $y^2 + 4z^2 = 0$; cette génératrice rencontre le total des lignes multiples uniquement à l'origine, de sorte que l'origine est point où le plan tangent, pour chaque nappe de la surface, doit être considéré comme indéterminé autour de la génératrice (ce qui, par dualité, correspond à un plan tangent dont le point de contact est indéterminé sur la génératrice); de la sorte un plan *quelconque* mené par $Ox$ doit être considéré comme *bitangent* à la surface (avec point de contact confondu avec l'origine). La surface $S$ étudiée est de classe 6 et chaque cône circonscrit à la surface doit posséder l'équivalent de 10 plans tangents doubles: on

trouve d'abord les deux plans tangents menés du point choisi $P$ au cylindre $y-(x-z)^2=0$, comptant chacun pour 3; il y a le plan passant par $P$ et $Ox$, qui doit compter pour 2 (dualistiquement, surface ayant une génératrice double, les deux nappes ayant le même plan tangent, commun à elles deux, tout le long de la génératrice, de sorte que toute section plane admet, sur la génératrice, un point double comptant pour 2); il reste donc à montrer que le plan contenant deux génératrices $(t, m)$ et $\left(-t, \frac{m}{2m-1}\right)$ enveloppe une développable de classe 2; ce plan a une équation qui est de l'une ou l'autre forme

$$(17)\quad \begin{cases} y-2tx+t^2+2tz+\varrho\,[z-m(x-t)]=0 \\ y+2tx+t^2-2tz+\sigma\left[z-\dfrac{m}{2m-1}(x+t)\right]=0 \end{cases}$$

$$t^2=\frac{m^2}{2m-1}.$$

Ces deux équations doivent avoir des premiers membres identiques, ce qui donne aisément

$$\varrho=\frac{-2t}{m} \qquad \sigma=\frac{2t(2m-1)}{m}$$

et l'équation

$$y-t^2+\frac{2t(m-1)}{m}z=0.$$

Avec le paramètre $\mu$, ceci s'écrit

$$(18)\qquad y-\frac{(\mu^2+1)^2}{4\mu^2}+\frac{z}{\mu}(\mu^2-1)=0.$$

En posant comme plus haut $\mu-\frac{1}{\mu}=M$ on a l'équation définitive

$$y-\frac{(M^2+4)}{4}+Mz=0$$

ce qui vérifie la proposition.

La surface $S$ ne donne donc pas, par dualité, une surface exactement de même type: la surface $S_1$ a encore une conique double d'osculation, une génératrice double unique, mais cette génératrice équivaut à la réunion de deux génératrices doubles et il reste une conique double.

D'après la première équation (17), on peut prendre, comme représentation paramétrique tangentielle de $S$ les équations

$$(19) \quad u = -2t - \varrho m \qquad v = 1 \qquad w = 2t + \varrho \qquad h = t^2 + \varrho m t$$

avec $t^2 = \dfrac{m^2}{2m-1}$; on vérifie ainsi que, pour $m = t = 0$, on a, en laissant varier $\varrho$, tous les plans $y + \varrho z = 0$ qui pivotent autour de $Ox$ et sont tangents au point (0, 0, 0). On a aisément l'équation tangentielle en remarquant les relations

$$ut + h + t^2 v = 0$$

$$m = \frac{u + 2tv}{2tv - w} \qquad m^2 = \frac{(u+2tv)^2}{(2tv-w)^2} = \frac{-4hv + u^2}{(2tv-w)^2}$$

$$2m - 1 = \frac{2u + 2tv + w}{2tv - w} = \frac{2u(2tv - w) + 4t^2v^2 - w^2}{(2tv-w)^2}$$

$$= \frac{2u(2tv - w) - 4utv - 4hv - w^2}{(2tv-w)^2} = \frac{-2uw - w^2 - 4hv}{(2tv-w)^2}$$

$$(20) \quad \frac{m^2}{2m-1} = \frac{-4hv + u^2}{-2uw - w^2 - 4hv} = t^2 = -\frac{ut + h}{v}$$

Finalement il ne reste plus qu'à éliminer $t$ entre les deux dernières équations (20), ce qui donne

$$(21) \quad u^2(u^2 - 4hv)[w^2 + 2uw + 4hv] + [vu^2 - 4hv^2 - hw^2 - \\ - 2uwh - 4vh^2]^2 = 0$$

En remplaçant $u, v, w, h$ par $x, 1, y, z$ on a une surface $S_1$ correspondant dualistiquement à $S$, à savoir

$$(S_1) \quad x^2(x^2 - 4z)(y + 2xy + 4z) + (x^2 - 4z - zy^2 - 2xyz - 4z^2)^2 = 0$$

pour laquelle les vérifications des particularités annoncées sont faciles: conique d'osculation:

$$x + y = 0 \qquad x^2 - 4z = 0$$

Conique double ordinaire:

$$x = 0 \qquad 4z + y^2 + 4 = 0$$

Génératrice double $x = z = 0$ et transportant l'origine au point $(0, h, 0)$, lieu des tangentes

$$z^2 = 0$$

Si l'on veut éviter sur $S$ la présence d'une génératrice double isolée, il suffit de remplacer $x$, $z$, $t$ par $ix$, $iz$, $it$ sans toucher à $y$ ni $m$.

L'exemple qui précède fait bien comprendre comment sur une surface réglée on découvre les génératrices où le plan tangent est le même tout du long de la génératrice (point de contact indéterminé sur la génératrice) et sur chacune de ces génératrices le point où le plan tangent est indéterminé autour de la génératrice. On prend une ligne multiple de la surface: de chaque point de cette ligne partent $p$ génératrices en général distinctes: pour un point $P$ exceptionnel de la ligne multiple, deux (ou davantage) génératrices se confondent en une seule $G$: $G$ est l'une des génératrices annoncées et, $P$ le point cherché sur $G$.

5. *Nature des sections planes d'une surface réglée algébrique.* Tandis qu'une courbe plane isolée peut admettre des points multiples de caractères indépendants, la section plane *générale* d'une surface réglée algébrique (autre qu'un cône ou cylindre) a nécessairement ses points multiples répartis par groupes tels que dans chaque groupe les points multiples offrent les mêmes particularités (au point de vue des cycles notamment): une génératrice multiple, ou une directrice rectiligne, donne à ce point de vue un groupe réduit à un seul point: il suffit de prendre chaque morceau irréductible de la ligne multiple et de se rappeler que, — les points singuliers de cette ligne étant isolés, — de chaque point de cette ligne multiple partent le même nombre de génératrices, soit $q$, où $q$ est l'ordre de multiplicité de la ligne; et alors chacune des $q$ génératrices issues d'un point présente les mêmes particularités que chacune des $q-1$ autres, sinon la surface se décomposerait; on peut d'ailleurs concevoir que ces $q$ génératrices peuvent être séparées en $q_1$ groupes de $q_2$ génératrices ($q = q_1 q_2$) où les $q_2$ génératrices d'un groupe ont les mêmes particularités, chacun des $q_1$ groupes ayant les mêmes particularités que chacun des $q_1 - 1$ autres. Par exemple soit une courbe $C$ arbitraire et deux surfaces $S_1$, $S_2$ arbitraires ($C$, $S_1$, $S_2$ étant algébriques); par chaque tangente à $C$ menons un plan tangent à $S_1$ (il y en a $q_1$ si $S_1$ est de classe $q_1$); dans chacun d'eux menons du point de contact avec $C$ de la tangente les tangentes à la section de $S_2$; il y en a $q_2$, si $q_2$ est la classe de la section plane générale de $S_2$; nous obtenons ainsi $q_1$ groupes de $q_2$ génératrices d'une surface

réglée $S$ algébrique indécomposable en général. On peut d'ailleurs concevoir une séparation plus détaillée $q = q_1 q_2 \ldots q_k$. Nous avons fourni un exemple de cette espèce au paragraphe précédent, avec un groupe de 2 points multiples d'ordre $2p$ sur une conique. De plus, pour chaque point du groupe (quel que soit l'exemple) les cycles d'un même groupe ont par rapport à l'un d'eux un certain comportement qui reste le même quand on passe ensuite à un autre cycle: dans l'exemple adopté, en un point multiple d'ordre $2p$, nous avions $2p$ cycles séparés en $p$ groupes de 2: deux cycles d'un même groupe sont osculateurs, ils sont tangents aux $2p-2$ autres cycles.

Si donc on a un point multiple dont les cycles n'offrent pas un caractère de régularité, ou bien ce point est sur une génératrice multiple, ou bien la section *complète* de la surface réglée comprend la courbe plane étudiée et un morceau complémentaire formé de génératrices.

6. *Surfaces ayant plusieurs lignes de raccord.* Une même surface peut avoir une ligne de raccord décomposée; pour trouver une telle surface, il suffit évidemment de trouver deux courbes $\Gamma$, $\Gamma'$ avec une correspondance (2, 2) entre leurs points de façon que la tangente en $M$ à $\Gamma$ soit coplanaire avec la corde joignant les homologues de $M$ sur $\Gamma'$, et que la propriété analogue ait lieu en renversant le rôle des deux courbes. En donnant des exemples d'une telle configuration, il peut arriver que la correspondance se décompose en une somme de deux correspondances (1, 1) et alors la surface réglée se décompose. Malgré que l'on n'obtienne pas alors une vraie solution, il est intéressant de donner un exemple où les deux courbes sont deux coniques.

Par une homographie, on peut placer les coniques dans deux plans parallèles; la tangente en $M$ à la conique $C$ est donc parallèle à la corde joignant les homologues sur $\Gamma$. On trouve d'abord une solution évidente en prenant deux semi-quadriques complémentaires; cette solution correspond au cas où la droite d'intersection des deux plan coupe les deux coniques aux mêmes points. La seule solution que l'on puisse ajouter à celle-là est fournie par le cas où cette droite touche les deux coniques (en un point différent pour chacune). On peut prendre les équations des coniques

$$C) \qquad z = 0, \quad y = x^2 \quad (x = t,\ y = t^2,\ z = 0)$$

$$\Gamma) \qquad z = 1 \quad X = Y^2 \quad (X = \theta^2,\ Y = \theta,\ z = 1)$$

La tangente en $M$ a pour équations

(1) $$z = 0 \qquad y - 2tx + t^2 = 0$$

donc la corde joignant les homologues de $M$ a pour équations

(2) $$z = 1 \qquad Y - 2tX + f(t) = 0$$

où $f$ est une fraction rationnelle en $t$; il en résulte la relation entre $t$ et $\theta$

(3) $$\theta - 2t\theta^2 + f(t) = 0$$

et pour que ce soit une correspondance (2, 2), on doit prendre

$$f(t) = \frac{At^2 + 2Bt + C}{Dt + E}$$

ce qui donne la correspondance

(4) $$\theta(Dt + E) - 2t(Dt + E)\theta^2 + At^2 + 2Bt + C = 0$$

Le même raisonnement montre que la correspondance peut aussi être fournie par l'équation

(5) $$t(D'\theta + E') - 2\theta(D'\theta + E')t^2 + A'\theta^2 + 2B'\theta + C' = 0$$

et la comparaison prouve, puisqu'il n'y a pas de terme en $t^2$ ni $t\theta^2$ dans (5) que l'on a $A = 0$, $E = 0$; pour le même raison on a $A' = 0$, $E' = 0$; mais alors il n'y a plus de terme en $t$ dans (5), donc $B = 0$ et la relation (4) prend la forme)

$$Dt\theta - 2Dt^2\theta^2 + C = 0$$

ou simplement, avec un paramètre $\varrho$

(6) $$2t^2\theta^2 - t\theta + \varrho = 0$$

Elle se décompose donc en deux correspondances (1, 1), à sovoir $t\theta = C_1$, $t\theta = C_1$, $C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$.

Formons donc l'équation de la surface réglée de degré 4 obtenue en écrivant $t\theta = C$ et joignant les points $(t, \theta)$. On a aisément les équations paramétriques

(7) $$\begin{cases} x = t + \sigma\left(\dfrac{C^2}{t^2} - t\right) \\ y = t^2 + \sigma\left(\dfrac{C}{t} - t\right) \\ z = \sigma \end{cases}$$

On élimine donc $t$ entre les équations

$$\begin{cases} t^2 x = t^3 + z\,[C^2 - t^3] \\ t\,y \;= t^3 + z\,[C - t^3] \end{cases}$$

ou par des combinaisons évidentes entre

$$\begin{cases} t^2(1-C)(1-z) - t\,x + C\,y = 0 \\ t^2 \quad x \quad - t\,y + (C - C^2)\,z = 0 \end{cases}$$

On trouve ainsi la surface

$$[z(1-z)(1-C)^2 - xy]^2\,C - [(1-C)(1-z)\,y - \\ - x^2]\,[xz(1-C) - y^2] = 0$$

ou, après quelques réductions

$$(8) \quad z^2(1-z)^2(1-C)^3\,C - xyz(1-z)(1-C)(2\,C+1) + \\ + x^3 z + y^3(1-z) - x^2 y^2 = 0$$

La surface analogue relative à $C_1 = \frac{1}{2} - C$ a pour équation

$$(9) \quad \frac{z^2(1-z)^2(1+2\,C)^3(1-2\,C)}{16} - xyz(1-z)(1-C)(2\,C+1) + \\ + x^3 z + y^3(1-z) - x^2 y^2 = 0$$

et l'on voit que l'intersection des deux surfaces s'obtient en coupant la première par la surface

$$z^2(1-z)^2 = 0$$

On trouve ainsi, vérification des calculs, les deux paraboles de raccord, puis deux droites, génératrices communes aux deux surfaces

$$(z = 0,\ y = 0) \quad \text{et} \quad (1 - z = 0 \quad x = 0)$$

comptant chacune pour 4. En coupant les deux surfaces par un plan arbitraire, on obtient donc $\infty^3$ systèmes de deux quartiques planes ayant 4 points de contact simple et deux points de contact d'ordre 3. On remarquera qu'un tel couple de deux quartiques dépend de dix-huit paramètres, réduits par une homographie plane à dix paramètres invariants. Ici, si nous effectuons une homographie à 15 paramètres, de l'espace à trois dimensions, nous ne devons pas tenir compte du déplacement à 6 paramètres, qui reconstituerait chacun de nos couples: donc nous obtenons (sauf déplacement du plan dans l'espace) simplement $\infty^{12}$ couples au lieu de $\infty^{15}$ pour le couple général, quand on supprime les 3 paramètres de déplacement d'un plan sur lui-même).

---

# Une remarque sur les transformations réelles et orthogonales.

Par

A. Hoborski (Kraków).

Désignons par $a_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ les coefficients d'une transformation réelle et orthogonale dans l'espace $R_3$, nous aurons:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{ik}\, a_{ij} = \delta_{kj} = \begin{cases} 0 \text{ pour } k \neq j \\ 1 \text{ pour } k = j \end{cases} \qquad k, j = 1, 2, 3.$$

On sait que l'on a:

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon$$

où on a $\varepsilon = \pm 1$. Posons

$$(3) \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}.$$

Nous démontrerons les propositions suivantes:

(I) $\left.\begin{array}{l} \text{pour } \varepsilon = +1, \ -1 \leqslant \alpha \leqslant 3 \\ \text{pour } \varepsilon = -1, \ -3 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{array}\right\}$ ou $\mathrm{Min}(3\varepsilon, -\varepsilon) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Max}(3\varepsilon, -\varepsilon)$;

(II) si l'on a $\alpha = -\varepsilon$ on a $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$; donc dans ce cas le déterminant $\Delta$ est symétrique;

(III) si l'on a $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$, on a: ou bien $\alpha = -\varepsilon$, ou $a_{ik} = \varepsilon\, \delta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$.

**Démonstration.** I) Pour $k = j$, la relation (1) donne $|a_{i,k}| \leqslant 1$. Donc on a

$$-3 \leqslant \alpha \leqslant 3.$$

En posant ensuite $a_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}$ on vérifie les relations (1) et (2) et on obtient $\alpha = 3\varepsilon$, mais on ne peut pas avoir $\alpha = -3\varepsilon$, parce-qu'on obtiendrais $a_{ii} = -\varepsilon$, $a_{ik} = 0$ $(i \neq k,\ i, k = 1, 2, 3)$ et ces valeurs ne vérifient pas la relation (2).

Pour établir le théorème I il suffit de démontrer la relation

$$(\alpha - 3\varepsilon)(\alpha + \varepsilon) \leqslant 0,$$

équivalente à la suivante:

$$\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha - 3 \leqslant 0.$$

Or on a

$$\alpha^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{11}a_{22} + 2a_{22}a_{33} + 2a_{11}a_{33} =$$
$$= 1 - a_{12}^2 - a_{13}^2 + 1 - a_{21}^2 - a_{23}^2 + 1 - a_{31}^2 - a_{32}^2 + 2(a_{12}a_{21} + \varepsilon a_{33}) +$$
$$+ 2(a_{23}a_{32} + \varepsilon a_{11}) + 2(a_{13}a_{31} + \varepsilon a_{22}) = 3 + 2\varepsilon\alpha - (a_{12} - a_{21})^2 -$$
$$-(a_{13} - a_{31})^2 - (a_{23} - a_{32})^2,$$

d'où

$$\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha - 3 = -(a_{12} - a_{21})^2 - (a_{13} - a_{31})^2 - (a_{23} - a_{32})^2. \tag{4}$$

Donc on a bien:

$$\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha - 3 \leqslant 0,$$

c. q. f. d.

II. Si nous posons $\alpha = -\varepsilon$ dans l'égalité (4), nous obtenons la relation:

$$0 = -(a_{12} - a_{21})^2 - (a_{13} - a_{31})^2 - (a_{23} - a_{32})^2$$

d'où il suit[1])

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{5}$$

III. Reciproquement, si les relations (5) ont lieu, la relation (4) nous donne:

$$\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha - 3 = 0.$$

On a donc $\alpha = -\varepsilon$ ou $\alpha = 3\varepsilon$ c'est à dire dans le dernier cas on a $a_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}$.

Le théorème III est donc aussi démontré.

---

[1]) Pendant la correction je me suis aperçu que notre théorème pour $\varepsilon = +1$ se trouve dans un mémoire de E. Study [Mathematische Annalen vol. 39 (1891) p. 534].

# Complément au travail „Sur le théorème intégral de Cauchy“.

Par

M. W. Wilkosz (Cracovie).

Le but essentiel du travail „Sur le théorème intégral de Cauchy“ inséré dans ce volume (p. 19 *ss.*) consistait à démontrer le théorème de Montel-Looman sur les équations de Cauchy-Riemann et cela sous les conditions suivantes:

Supposons les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ *continues* dans le domaine $D$ et douées dans tout point de ce domaine de dérivées partielles du 1[er] ordre *finies*. Supposons encore les relations:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

vérifiées *presque* partout dans le domaine $D$. Dans ce cas, les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ représentent respectivement la partie *réelle* et *imaginaire* d'une fonction *analytique* dans le domaine considéré. Il est bien connu que la démonstration de cette proposition s'achève immédiatement lorsque l'on possède comme lemme le Théorème du travail mentionné (p. 20).

Dans cet énoncé, aux conditions du Théorème que nous venons de citer, *s'ajoutent automatiquement* les conditions *d'existence* et de *finitude* des dérivées

$$\frac{\partial p}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Pour achever rigoureusement la démonstration du Théorème, nous appliquerons donc le lemme de M. Looman (p. 21) à l'ensemble des rapports

$$\frac{p(x,y')-p(x,y'')}{y'-y''}, \quad \frac{p(x',y)-p(x'',y)}{x'-x''}$$
$$\frac{q(x,y')-q(x,y'')}{y'-y''}, \quad \frac{q(x',y)-q(x'',y)}{x'-x''}$$

en modifiant en même temps dans ce sens les suppositions au commencement du N⁰ 4 (p. 21).

Lorsque l'on considère le Théorème (p. 20) en lui-même, *l'existence* et la *finitude* des dérivées

$$\frac{\partial p}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial q}{\partial y}$$

doit être (au moins dans notre raisonnement) *additionellement postulée* [1]).

Les résultats obtenus se prêtent à une *généralisation* immédiate: au lieu de supposer *l'existence* des dérivées

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$$

en tout point du domaine $D$, il *suffit* d'exiger que:

1⁰ les *nombres dérivés* de Dini par rapport à $x$ et $y$ des fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ soient *partout finis*;

2⁰ les *dérivées* existent *presque* partout et satisfassent aux relations de Cauchy-Riemann *presque* partout dans le domaine $D$.

On voit facilement que dans ce cas la démonstration du texte reste presque inaltérée. Nous nous trouvons alors exactement dans les conditions de M. Looman. Une généralisation analogue s'applique au Théorème (p. 20) de notre travail.

---

[1]) Je dois cette remarque à l'amabilité de M. Saks.

## Comptes-rendus et analyses.

Nouveaux fascicules du **„Mémorial des Sciences mathématiques“** (Chez Gauthier-Villars & C[ie], Paris, Quai des Grands Augustins, 55).

**Fascicule LIV.** *Les Singularités des Fonctions Analytiques représentées par une série de Taylor.* Par M. S. Mandelbrojt, Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

Une fonction analytique d'une variable complexe $z$ est, comme il est bien connu, déterminée complètement dans tout son domaine d'existence par son développement en série de Taylor dans le voisinage d'un de ses points non singuliers. On peut donc chercher à déterminer les diverses propriétés et plus particulièrement les singularités d'une fonction analytique étant donné son développement en série de la nature susdite. C'est à cette difficile question dont l'étude a été brillamment ébauchée par M. Hadamard et à laquelle M. Mandelbrojt lui-même a apporté d'importantes contributions que la présente monographie est consacrée.

**Fascicule LV.** *Les trajectoires de la dynamique.* Par M. Édouard Husson, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

L'auteur considère un système matériel libre ou soumis à des liaisons sans frottement, et dont la position dépend d'un nombre fini de paramètres $q_1, q_2 \ldots q_n$ et il s'attache surtout à l'étude du cas où il existe une fonction des forces indépendante du temps. Dans ce cas les équations différentielles du mouvement du système ont une forme particulière et l'on trouvera dans le présent fascicule une exposition remarquablement lumineuse de l'ensemble des résultats obtenus jusqu'à présent par les recherches consacrées à ce sujet.

**Fascicule LVI.** *Stabilité et Dynamique de la Production dans l'Économie Politique.* Par M. G. Evans, Professeur de mathématiques pures au Rice Institute, Houston, Texas.

Ainsi que le fait observer l'auteur lui-même, il n'est pas question de présenter dans cet opuscule une analyse complète de toute la théorie mathématique de l'économie politique. L'auteur se propose de traiter des problèmes „qui auront peut-être un nouvel intérêt pour les économistes, étant, soit nouveaux, soit considérés sous un aspect nouveau et peut-être suggestif".

Faute de place, il nous est impossible de donner une idée des questions étudiées dans le fascicule considéré. Nous nous bornerons donc à dire que le lecteur qui s'intéresse aux applications des mathématiques à l'économie politique trouvera dans cet ouvrage une foule de renseignements précieux.

**Fascicule LVII.** *Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert.* Par M. Jean Delsarte.

L'auteur, après avoir résumé la théorie de l'espace de Hilbert et celle des transformations linéaires de cet espace, passe au sujet propre de son ouvrage, sujet auquel il a apporté lui-même d'importantes contributions. Le mode d'exposition adopté par M. Delsarte est remarquablement clair et ne suppose chez le lecteur que des connaissances qui rentrent actuellement dans le programme des cours d'analyse mathématique professés ordinairement aux Facultés des Sciences des diverses Universités.

**Fascicule LVIII.** *Application de la Gravifique einsteinienne à l'Electrodynamique des Corps en mouvement.* Par M. Th. de Donder.

Pour donner une idée de la nature du présent opuscule nous ne croyons pas pouvoir mieux faire que de citer l'avant-propos de l'auteur.

„Le présent fascicule termine la synthèse gravifique qui à été développée dans les fascicules VIII, XIV et XLIII du **Mémorial des Sciences mathématiques**, parties de cette synthèse qui seront indiqués par I, II, III. On y verra traitée l'électrodynamique des corps en mouvement, l'électromagnétostriction, les tensions des radiations, l'hystérèse, la thermodynamique relativiste. Cette méthode générale fournit immédiatement la relativité restreinte. Le dernier chapitre est consacré à la généralisation de la mécanique ondulatoire de Dirac".

**Fascicule LIX.** *Les suites de fonctions en général (domaine complexe).* Par M. L. Leau, Professur à la Faculté des Sciences de Nancy.

Le plus grande partie de l'ouvrage est consacrée à la théorie des suites de fonctions analytiques d'une seule variable complexe, théorie dominée par les notions fondamentales de famille normale et de famille quasi normale, dues à M. Montel qui lui ont permis d'établir une foule de résultats de première importance. Il convient cependant de remarquer que le dernier chapitre de l'ouvrage est consacré à des suites de fonctions de plus d'une variable. Le présent fascicule du „Mémorial des Sciencies mathématiques" dont le lecteur appréciera la clarté et la précision de l'exposition, est certainement appelé à rendre d'excellents services. *S. Z.*

Stefan Banach, Professeur à l'Université de Lwów. *Théorie des opérations linéaires.* Warszawa 1932 (Un volume in 8°, VII+254 pages).

L'extrait suivant de la préface renseignera le mieux le lecteur sur la nature de cet important ouvrage:

„Le livre présent contient la première partie de l'algèbre des opérations. Il est consacré à l'étude des opérations dites *linéaires*, qui correspond à celles des formes linéaires $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$ de l'algèbre.

La notion d'opération linéaire peut être définie comme il suit. Soient $E$ et $E_1$ deux espaces formés d'éléments quelconques, mais où une addition associative et l'élément-zéro sont supposés définis. Soit $y = U(x)$ une fonction (opération, transformation) qui fait correspondre à tout élément $x$ de $E$ un élément $y$ de $E_1$ (daus le cas où $E_1$ est en particulier l'espace des nombres réels, cette fonction porte le nom de *fonctionnelle*). Si quels que soient $x_1$ et $x_2$ de $E$, on a $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$, l'opération $U(x)$ s'appelle *additive.* Si, en outre, $E$ et $E_1$ sont des espaces *métriques*, c. à d. que dans chacun d'eux la *distance* des éléments est définie, on peut considérer des opérations $U(x)$ *continues.* Or les opérations à la fois additives et continues s'appellent linéaires.

Dans ce livre je me suis proposé de recueillir surtout les résultats concernant les opérations linéaires définies dans certains espaces généraux, notamment dans les ainsi dits *espaces du type* $(B)$, dont des cas particuliers sont: l'espace des fonctions continues, celui des fonctions à $p$-ième puissance sommable, l'espace de Hilbert etc."

J'ajoute que le livre qui nous occupe et qui contient les nombreuses et importantes contributions de l'auteur lui-même aux théories qu'il expose, se recommande par la clarté et la précision de l'exposition. *S. Z.*

# État
## de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1933.

*Président*: M. S. Mazurkiewicz.

*Vice-Présidents*: MM. S. Banach et S. Zaremba.

*Secrétaire*: M. T. Ważewski.

*Vice-Secrétaire*: MM. R. Dniestrzański et S. Turski.

*Trésorier*: M. S. Gołąb.

*Autres Membres du Bureau*: MM. A. Hoborski, A. Rosenblatt et W. Wilkosz.

*Commission de Contrôle*: M[me] Wilkosz et MM. Chwistek et Vetulani.

Il existe quatre sections de la Société, l'une à Lwów, présidée par M. H. Steinhaus, la seconde à Varsovie, présidée par M. S. Mazurkiewicz, la troisième à Poznań, présidée par M. Z. Krygowski, la quatrième à Wilno.

---


BIBLIOTHECA
UNIV. JAGELL.
CRACOVIENSIS